Collection Math - Plus

M+ PREMIER CYCLE UNIVERSITAIRE

275

Exercices et Problèmes Résolus de

MATHEMATIQUES

Supérieures

ANALYSE

Abdellatif ABOUHAZIM

Abderrahim ABKARI

M' hamed EL MOUNTASSIR

Saïd Ramadan NSIRI

PREMIERE ANNEE

tome 3

AFRIQUE ORIENT

PREFACE

Cet ouvrage vient compléter le livre de cours d'Analyse (tome I) de la collection " Maths-plus". Il propose des exercices et problèmes de niveaux variés sur le programme des premières années des facultés et instituts supérieurs.

Les exercices sont rangés par ordre de difficulté croissante et suivent presque fidèlement les paragraphes et chapitres du livre de cours d'Analyse (tome I) de la collection "Maths-plus".

La méthode est simple : chaque exercice est suivi d'une solution détaillée et quelquefois en plus, d'exercices de même type non résolus. Ainsi, pour une bonne compréhension du cours et une bonne préparation à un examen, il est vivement conseillé de chercher et d'essayer de résoudre SEUL les exercices et le cas échéant, revoir la ou les parties du cours avant de consulter, en extrême recours, la solution du problème, l'écrire et la refaire soi-même.

Nous espérons que ce livre apportera une aide efficace aux étudiants et leur permettra de mieux aborder les notions et méthodes nouvelles introduites au début des études supérieures en Analyse.

LES AUTEURS.

TABLE DES MATIERES

CALCUL DANS ℝ

1.1. Soit A une partie non vide de ℝ. On pose $(-A) = \{-x / x \in A\}$. Montrer que :

1°) Si A est majorée, (-A) est minorée et on a : $\inf(-A) = -\sup A$.

2°) Si A est minorée, (-A) est majorée et on a : $\sup(-A) = -\inf A$.

Solution

1°) Soit A une partie non vide, majorée de ℝ. Soit α sa borne supérieure. Donc, par définition on a :

i) $\forall x \in A \qquad x \leq \alpha.$

ii) $\forall \varepsilon \in 0 \qquad \exists x_0 \in A \qquad \alpha - \varepsilon < x_0 \leq \alpha.$

Il est clair que (-A) est une partie non vide et minorée par $\alpha' = -\alpha$ puisque d'après i) :

$$\forall y \in (-A) \quad -y \in A \quad \text{donc} \quad -y \leq \alpha. \text{ c'est à dire } -\alpha \leq y.$$

D'autre part, soit $\varepsilon > 0$. On sait, d'après ii) qu'il existe $x_0 \in A$ tel que :

$$\alpha - \varepsilon < x_0 \leq \alpha \text{ . D'où } \quad -\alpha \leq -x_0 < -\alpha + \varepsilon. \quad \text{Par suite}$$

$\alpha' \leq -x_0 < \alpha' + \varepsilon$. D'où : $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists y_0 \in (-A) \quad \alpha' \leq y_0 < \alpha' + \varepsilon.$

Donc $\alpha' = -\sup A$ est la borne inférieure de (-A)

2°) Démonstration analogue. ■

1.2. Soient A et B deux parties non vides de ℝ. Montrer que :

1°) Si A et B sont majorées, $A \cup B$ est majorée et

$$\sup(A \cup B) = \sup(\sup A, \sup B).$$

2°) Si A et B sont minorée, $A \cup B$ est minorées et

$$\inf(A \cup B) = \inf(\inf A, \inf B)$$

Solution

1°) A et B sont des parties non vides majorées de ℝ, soit $\alpha = \sup A$ et $\beta = \sup B$

Soit $M = \sup(\alpha, \beta)$. M est alors un majorant à la fois de A et de B,donc de $(A \cup B)$

Comme A et B jouent des rôles symétriques, on peut supposer, par exemple que $M = \beta$.

Soit $\varepsilon > 0$. Comme $M = \beta = \sup B$, il existe $y_0 \in B$ tel que $\beta - \varepsilon < y_0 \leq \beta$.

D'où : $\forall \varepsilon > 0 \qquad \exists y_0 \in (A \cup B) \qquad \beta - \varepsilon < y_0 \leq \beta.$

Ce qui prouve que $\sup(A \cup B) = M = \sup(\sup A, \sup B)$.

2°) Démonstration analogue. ■

1.3. Soit $\{A_\alpha\}_{\alpha\in I}$ une famille quelconque de parties non vides de $\mathbb{R}$.

1°) Si pour tout $\alpha\in I$, A_α est majorée et si l'ensemble

$U = \{\sup A_\alpha / \alpha\in I\}$ est majoré, alors $\bigcup_{\alpha\in I} A_\alpha$ est majorée et on a :

$$\sup\Big(\bigcup_{\alpha\in I} A_\alpha\Big) = \sup(\sup A_\alpha)$$

Peut-on avoir le résultat si l'hypothèse "U majoré" n'est pas vérifiée?

2°) Si pour tout $\alpha\in I$, A_α est minorée et si l'ensemble $V= \{\inf A_\alpha / \alpha\in I\}$ est minoré alors $\bigcup_{\alpha\in I} A_\alpha$ est minorée et on a : $\inf\Big(\bigcup_{\alpha\in I} A_\alpha\Big) = \inf(\inf A_\alpha)$

Peut-on avoir le résultat si l'hypothése "V minoré" n'est pas vérifiée?

Solution

1°) Pour tout $\alpha \in I$, A_α est une partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$. Soit $s_\alpha = \sup A_\alpha$.

De plus, l'ensemble $U = \{ s_\alpha = \sup A_\alpha \ / \alpha \in I \}$ est majoré (et non vide).

Soit $s = \sup U$. Pour simplifier l'écriture, posons $A = \bigcup_{\alpha\in I} A_\alpha$

On a par définition : $\forall\ \alpha \in I \quad \sup A_\alpha \leq s$.

D'où : $\qquad \forall\ x \in A \qquad x \leq s. \qquad$ et $\qquad$ A est alors <u>majorée</u> par s.

Soit $\varepsilon > 0$.

Comme $s = \sup U$, il existe $\alpha \in I$ tel que $s - \varepsilon/2 < s_\alpha \leq s$.

Mais alors, comme par définition $s_\alpha = \sup A_\alpha$, il existe $x \in A_\alpha$ tel que

$$s_\alpha - \varepsilon/2 < x \leq s_\alpha \text{ . D'où :}$$

$$s - \varepsilon = (s - \varepsilon/2) - \varepsilon/2 < s_\alpha - \varepsilon/2 < x \leq s_\alpha \leq s.$$

Et par suite:

$$\forall\ \varepsilon > 0 \quad \exists\ x \in A \quad s - \varepsilon < x \leq s.$$

Ce qui montre que : $s = \sup A$. C'est à dire :

$$\sup\Big(\bigcup_{\alpha\in I} A_\alpha\Big) = \sup(\sup A_\alpha)$$

Supposons, maintenant que U n'est pas majoré. D'où :

$$\forall\ n \in \mathbb{N} \quad \exists\ \alpha_n \in I \quad \text{tel que} \quad s_{\alpha_n} > n.$$

En choisissant $\varepsilon = (s_{\alpha_n} - n) > 0$, on peut écrire par définition des s_α :

$$\forall\ n\in \mathbb{N} \quad \exists\ x_n \in A_{\alpha_n} \quad \text{tel que} \quad s_{\alpha_n} - \varepsilon < x_n \leq s_{\alpha_n}.$$

D'où :

$$\forall\ n \in \mathbb{N} \quad \exists\ x_n \in A_{\alpha_n} \quad \text{tel que} \quad n < x_n.$$

ou encore $\quad \forall\ n \in \mathbb{N} \quad \exists\ x_n \in A \quad$ tel que $n < x_n$.

Ce qui prouve que $A = \bigcup_{\alpha\in I} A_\alpha$ n'est pas majorée.

Exemple : $I = \mathbb{N}$.

$\forall\, n \in \mathbb{N} \qquad A_n =]-\infty, n]$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, A_n est majorée et $\sup A_n = n$, donc $U = \mathbb{N}$, et $A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n = \mathbb{R}$

n'est pas majoré. On peut poser dans ce cas, par convention : $\sup A = +\infty$

2°) La démonstration est analogue. ■

1.4. Soient A et B deux parties non vides de $\mathbb{R}$. On définit l'ensemble

$A + B = \{x + y \,/\, x \in A \text{ et } y \in B\}$. Montrer que :

1°) Si A et B sont majorées, (A+B) est majorée et on a :
$\sup(A + B) = \sup A + \sup B$.

2°) Si A et B sont minorées, (A + B) est minorée et on a :
$\inf(A + B) = \inf A + \inf B$.

3°) Généraliser ces résultats à un nombre fini de parties non vides de $\mathbb{R}$.

Solution

1°) Posons $\alpha = \sup A$ et $\beta = \sup B$.

Pour tout $z = x + y \in (A + B)$ on a:

$$z = x + y \leq \sup A + \sup B.$$

Donc (A + B) est majorée et on a : $\sup(A + B) \leq \sup A + \sup B$.

Mais, de plus, on a :

$$\forall\, \varepsilon > 0 \qquad \exists\, x_0 \in A \qquad \alpha - \varepsilon/2 < x_0 \leq \alpha.$$

$$\forall\, \varepsilon > 0 \qquad \exists\, y_0 \in B \qquad \beta - \varepsilon/2 < y_0 \leq \beta.$$

D'où, en posant $z_0 = x_0 + y_0 \in (A + B)$, on a :

$$\forall\, \varepsilon > 0 \qquad \exists\, z_0 \in (A + B) \qquad \text{tel que} \quad (\alpha + \beta) - \varepsilon < z_0 \leq (\alpha + \beta)$$

Ce qui prouve que $(\alpha + \beta)$ est la borne supérieure de (A + B).

Autrement dit : $\sup(A + B) = \sup A + \sup B$.

2°) Démonstration analogue.

3°) Pour généraliser ces résultat, il suffit de voir que :
$A + B + C = (A + B) + C$, et appliquer, par réccurence, les résultats 1) et 2). ■

1.5. Soient f et g deux fonctions numériques définies sur une partie E, non vide, de $\mathbb{R}$

Si f est bornée on définit $\sup f = \sup f(E)$ et $\inf f = \inf f(E)$. Montrer que :

1°) Si f et g sont majorées, (f + g) est majorée et on a :
$\operatorname{Sup}(f + g) \leq \sup f + \sup g$
A-t-on égalité dans le cas général ? Justifier votre réponse.

2°) Si f et g sont minorées, (f + g) est minorée et on a :
$\inf f + \inf g \leq \inf(f+g)$
A-t-on égalité dans le cas général ? Justifier votre réponse.

Solution

1°) Soient f et g deux fonctions numériques majorées, sur une partie E non vide de $\mathbb{R}$. Par définition on a :

$$\forall\, x \in E \quad (f+g)(x) = f(x) + g(x) \leq \sup f + \sup g.$$

Donc $(f+g)(E)$ est une partie non vide et majorée par $\sup f + \sup g$.
Comme la borne supérieure est le plus petit des majorants, on a :

$$\sup (f+g) \leq \sup f + \sup g$$

on n'a pas égalité dans le cas général. En effet :

$$\text{Si } E = [-1, 1] \text{ et } f(x) = x \text{ et } g(x) = -x$$

f et g sont majorées sur $[-1, 1]$ et $\sup f = 1$ et $\sup g = 1$

Alors que $(f+g)(x) = 0$ pour tout $x \in [-1, 1]$.

donc $\sup (f+g) = 0 \neq \sup f + \sup g = 2$.

2°) Démonstration analogue ■

1.6. Soient A et B deux parties non vides majorées de $\mathbb{R}+$.
On définit l'ensemble $AB = \{xy \,/\, x \in A \text{ et } y \in B\}$
Déterminer $\sup (AB)$ et $\inf (AB)$.

Solution

Soient $\alpha = \sup A$ et $\beta = \sup B$.
Si A ou B est réduit à $\{0\}$, le produit $AB = \{0\}$
donc $\sup (AB) = 0 = \sup A \,.\, \sup B$.
Supposons donc que A et B ne soient pas réduits à $\{0\}$.
Donc $\alpha \neq 0$ et $\beta \neq 0$.
On a d'abord $\forall\, x \in A \quad \forall\, y \in B \qquad xy \leq \sup A \sup B$.
Donc $\alpha\beta$ est un majorant de AB.
D'autre part :

$$\forall\, \varepsilon > 0 \qquad \exists\, x_0 \in A \qquad \alpha - \frac{\varepsilon}{2\beta} < x_0 \leq \alpha.$$

$$\forall\, \varepsilon > 0 \qquad \exists\, y_0 \in A \qquad \beta - \frac{\varepsilon}{2\alpha} < y_0 \leq \beta.$$

A et B étant des parties de $\mathbb{R}+$ et $\alpha \neq 0$ et $\beta \neq 0$ donc $\alpha > 0$ et $\beta > 0$. Donc :

$$\alpha\beta \geq z_0 = x_0 y_0 > \alpha\beta - \varepsilon + \frac{\varepsilon^2}{4\alpha\beta} > \alpha\beta - \varepsilon\,.$$

D'où : $\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, z_0 \in AB$ tel que $\alpha\beta - \varepsilon < z_0 \leq \alpha\beta$.

En résumé $\sup (AB) = \sup A \,.\, \sup B$.
De même, on démontre que : $\inf (AB) = \inf A \,.\, \inf B$. ■

1.7. Pour chacun des ensembles suivants donner, si elles existent, la borne inférieure et la borne supérieure et dire si elles font partie de l'ensemble considéré :

1°) $A = \{ x \in \mathbb{Q} \ / x^2 \leq 7\}$

2°) $B = \{ x \in \mathbb{Q} \ / x^3 \leq 8\}$

3°) $C = \{ x \in \mathbb{R} \ / x^2 \leq 5\}$

Solution

1°) Soit $A = \{x \in \mathbb{Q} \ / x^2 \leq 7\}$.

D'abord : $\forall x \in A \quad x^2 \leq 7 < 9.$

d'où : $\forall x \in A \quad x \in [-3, 3]$

Donc A est une partie de $\mathbb{R}$ qui est bornée, donc elle admet une borne inférieure et une borne supérieure. et on a :

$$\sup A = \sqrt{7} \notin A$$

$$\text{et } \inf A = -\sqrt{7} \notin A.$$

2°) $B = \{x \in \mathbb{Q} \ / x^3 \leq 8\}$.

$\forall x \in B \quad x^3 \leq 8$ équivaut à dire que : $(x - 2)(x^2+2x+4) \leq 0$.

Or le discriminant du trinôme $(x^2 + 2x + 4)$ est négatif donc cette quantité est toujours strictement positive . D'où :

$\forall x \in \mathbb{R} : [x \in B \Leftrightarrow x \in \mathbb{Q} \text{ et } x \leq 2]$.

D'où $B =]-\infty, 2] \cap \mathbb{Q}$. B est alors majorée par 2 et $\sup B = 2 \in B$.

Alors que B n'est pas minorée. On peut poser, par convention $\inf B = -\infty$

3°) $C = \{ x \in \mathbb{R} \ / x^2 \leq 5 \}$

$\forall x \in \mathbb{R} : [x \in C \Leftrightarrow x \in [-\sqrt{5}, \sqrt{5}]]$

Donc $C = [-\sqrt{5}, \sqrt{5}]$ donc $\inf C = -\sqrt{5} \in C$ et $\sup C = \sqrt{5} \in C$.

■

1.8. Soit $E = \{ x \in \mathbb{R}_+^* \ / \exists (m, n) \in \mathbb{Z}^2 \quad x = m + n\sqrt{2} \}$

Montrer que $\inf E = 0$.

Solution

Soit $E = \{ x \in \mathbb{R}_+^* \ / \exists (m, n) \in \mathbb{Z}^2 \quad x = m + n\sqrt{2} \}$.

Montrons que $\inf E = 0$.

D'abord, comme E est une partie non vide de $\mathbb{R}^*+$ puisque $1 \in E$, E est minorée par 0 donc possède une borne inférieure.

Soit $x_0 = -1 + \sqrt{2} \in E$. $x_0 \in]0, 1[$. Montrons que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ $x_0^k \in E$.

Par récurrence.
Pour $k = 1$ $\quad x_0^1 = x_0 \in E$.

Supposons que $x_0^k \in E$. D'où il existe un couple $(m, n) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $x_0^k = m + n\sqrt{2}$

On a : $x_0^{k+1} = x_0^k . x_0 = (m + n\sqrt{2})(-1 + \sqrt{2}) = (2n - m) + (m - n)\sqrt{2}$.

d'où $x_0^{k+1} \in E$. car $x^k \in E$ donc $x^k > 0$ et $x_0 > 0$.
Ainsi, on a construit une suite géométrique d'éléments de E, de premier terme x_o et de raison $x_o \in]0, 1[$. Cette suite est convergente et tend vers 0. D'où :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall k \in \mathbb{N} \;/\; [k \geq N \Rightarrow \; |x^k - 0| < \varepsilon]$$

Donc, en particulier

$$x_1 = x_0^N \in E \qquad \text{et} \qquad 0 < x_0^N < \varepsilon.$$

D'où $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists x_1 \in E$ tel que $\quad 0 < x_1 < 0 + \varepsilon$.
Ce qui prouve que 0 est la borne inférieure de E. ■

1.9. Montrer que chacun des ensembles suivants est borné, et calculer sa borne supérieure et sa borne inférieure :

1°) $A = \{ \dfrac{n-1}{n+1} \;/\; n \in \mathbb{N}^* \}$

2°) $B = \{ \sin((\pi/n) - \pi/4) \;/\; n \in \mathbb{N}^* \}$

3°) $C = \{ 1/n + \sin n\pi/3) \;/\; n \in \mathbb{N}^* \}$

Solution

1°) Soit $A = \{ \dfrac{n-1}{n+1} \;/\; n \in \mathbb{N} \}$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$-1 \leq \frac{n-1}{n+1} = 1 - \frac{2}{n+1} \leq 1.$$

Donc $A \subset [-1, 1]$ donc -1 est minorant de A et 1 est un majorant de A.

Comme $-1 = \dfrac{0-1}{0+1} \in A$ donc $\inf A = -1$ qui est donc le plus petit élément de A.

Montrons que 1 est la borne supérieure de A.

Considérons la suite de terme général $\dfrac{2}{n+1}$.

Lorsque n tend vers $+\infty$, cette suite tend vers 0. Donc :

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad [n \geq N_\varepsilon \Rightarrow \frac{2}{n+1} < \varepsilon]$

Donc en particulier $\frac{2}{N_\varepsilon+1} < \varepsilon$.

D'où $\frac{-2}{N_\varepsilon + 1} > -\varepsilon$ et $1 - \varepsilon < 1 - \frac{2}{N_\varepsilon + 1}$

Posons $x_\varepsilon = 1 - \frac{2}{N_\varepsilon + 1} \in A$ on a alors :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists x_\varepsilon \in A \quad \text{tel que} \quad 1 - \varepsilon < x_\varepsilon \leq 1.$$

Ce qui montre que : $\sup A = 1$.

2°) $B = \{ \sin(\pi/n - \pi/4) \ / \ n \in \mathbb{N}^* \}$.

$\forall x \in \mathbb{R} \ |\sin x| \leq 1$, donc l'ensemble B est borné.

$$\sin(\pi - \pi/4) = \sin \pi/4 = \sin(\pi/2 - \pi/4) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

D'autre part $\forall x \in \mathbb{N} \quad [n \geq 2 . \Rightarrow -\pi/4 \leq \pi/n - \pi/4 \leq \pi/4]$

Comme la fonction sinus est croissante sur $[-\pi/2, \pi/2]$ on a : $\forall y \in B \ -\frac{\sqrt{2}}{2} \leq y \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$

Donc $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ est un minorant et $\frac{\sqrt{2}}{2}$ est un majorant de B. Comme $\frac{\sqrt{2}}{2} \in B$ c'est donc le plus grand élément de B. d'où $\sup B = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Montrons que $\inf B = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

La suite $\{\pi/n\}_n$ tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$

Il en résulte que la suite $\{(\pi/n - \pi/4)\}_n$ tend vers $-\pi/4$

Comme la fonction sinus est continue sur $\mathbb{R}$, la suite $\{\sin(\pi/n - \pi/4)\}$ est également convergente et tend vers $\sin(-\pi/4) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$. D'où :

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad [n \geq N_\varepsilon \Rightarrow |\sin(\pi/n - \pi/4) + \frac{\sqrt{2}}{2}| < \varepsilon]$

D'où en particulier :

$$-\frac{\sqrt{2}}{2} - \varepsilon < \sin(\pi/N_\varepsilon - \pi/4) < -\frac{\sqrt{2}}{2} + \varepsilon$$

Et par conséquent :

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists y_0 \in B \quad$ tel que $\quad -\frac{\sqrt{2}}{2} \leq y_0 < -\frac{\sqrt{2}}{2} + \varepsilon$.

Ce qui prouve que $\inf B = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

3°) Soit $C = \{ 1/n + \sin n\pi/3 \ / \ n \in \mathbb{N}^* \}$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a $\quad 0 < 1/n \leq 1 \quad$ et $\quad -1 \leq \sin n\pi/3 \leq 1$.

Il en résulte que $\quad -1 \leq 1/n + \sin n\pi/3 \leq 2\,, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Ceci montre que l'ensemble C est borné: -1 est un minorant et 2 est un majorant de C. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $n\pi/3$ prend les valeurs $0, \pi/3, 2\pi/3, \pi, 4\pi/3, 5\pi/3$ modulo 2π. Donc on a : $-\dfrac{\sqrt{3}}{2} \leq \sin\dfrac{n\pi}{3} \leq \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Ceci montre que $1 + \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ (puisqu'il appartient à C) est le plus grand élément de C.

D'où $\quad \sup C = 1 + \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

Montrons que $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ est la borne inférieure de C.

La suite $\{1/n\}_n$ tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$. D'où :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad [n \geq N_\varepsilon \Rightarrow 1/n < \varepsilon]$$

Soit m un entier supérieur ou égal à N_ε. Posons $n = 5 + 6m$.

On voit facilement que :

i) $n \geq N_\varepsilon$

ii) $n\pi/3 = 5\pi/3 + 2m\pi$.

Il en résulte que : $\dfrac{1}{n} + \sin\dfrac{n\pi}{3} = \dfrac{1}{n} - \dfrac{\sqrt{3}}{2} < -\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \varepsilon$.

D'où, en résumé :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists z_0 \in C \quad \text{tel que} \quad -\frac{\sqrt{3}}{2} \leq z_0 < -\frac{\sqrt{3}}{2} + \varepsilon .$$

Ce qui montre que $\inf C = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ ■

1.10. **(Coupures de DEDEKIND).**

Soit f la fonction définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 + x - 1$.

1°) Etudier la monotonie de f.

2°) Soit p/q un rationnel. Montrer que l'égalité $f(p/q) = 0$ est impossible.

3°) Soit $A = \{a \in \mathbb{Q} \ / \ f(a) < 0\}$ et $B = \{b \in \mathbb{Q} \ / \ f(b) > 0\}$.

Montrer que : a) $A \cap B = \emptyset$ et $A \cup B = \mathbb{Q}$

b) $\forall a \in A$ et $\forall b \in B \quad a < b$.

4°) Montrer l'existence de $\alpha = \sup A$ et $\beta = \inf B$ dans $\mathbb{R}$ et qu'elles vérifient

$$0 < \alpha \leq \beta < 1.$$

5°) a) Montrer $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists a \in A \quad \exists b \in B$ tels que $0 < b - a < \varepsilon$

b) En déduire que $\alpha = \beta$.

6°) a) Soit $\quad 0 < x < y < 1$.

Montrer que $0 < f(y) - f(x) < 4(y - x)$.

b) En déduire que $f(\alpha) \leq 0$ et $f(\beta) \geq 0$.

c) Conclusion?

Solution

Soit $f(x) = x^3 + x - 1$ une fonction définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

1°) Etudions la monotonie de f.

Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

On a : $f(x) - f(y) = x^3 - y^3 + x - y$

$$= (x - y)\,[x^2 + xy + y^2 + 1]$$

La quantité entre crochets peut être considerée comme un trinôme du second degré en x avec un paramètre y. Son discriminant, pour chaque valeur de y, est :

$$\Delta = y^2 - 4\,(y^2 + 1) = -(3y^2 + 4) < 0 \qquad \forall\, y \in \mathbb{R}.$$

Donc ce trinôme est toujours strictement positif pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $y \in \mathbb{R}$.
D'où le signe de $[f(x) - f(y)]$ est celui de $(x - y)$ et par suite f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

2°) Soit $p/q \in \mathbb{Q}$, p et q étant des entiers relatifs premiers entre eux. Supposons que $f(p/q) = 0$. D'où, après avoir réduit au même dénominateur, on a :

$$p^3 + pq^2 - q^3 = 0.$$

ou encore $\qquad p(p^2 + q^2) = q^3.$

p divise le membre de gauche, donc p divise q^3.
Or p et q sont premiers entre eux donc p divise q
Ce qui absurde et prouve, par conséquent, que l'égalité $f(p/q) = 0$ est impossible.

3°) a) Soient $A = \{a \in \mathbb{Q}\ /\ f(a) < 0\}$ et $B = \{b \in \mathbb{Q}\ /\ f(b) > 0\}$.

f étant une application, A et B ne peuvent avoir de point commun, donc $A \cap B = \emptyset$.

D'autre part, on a bien $A \cup B \subset \mathbb{Q}$.

Soit $x \in \mathbb{Q}$. On sait que $f(x) = 0$ est impossible, donc :

- ou bien $f(x) < 0$ donc $x \in A$.
- ou bien $f(x) > 0$ donc $x \in B$.

et par suite $x \in A \cup B$. D'où $\quad A \cup B = \mathbb{Q}$

b) Maintenant, si l'on suppose qu'il existe $a \in A$ et $b \in B$ tels que $b < a$.
Comme f est strictement croissante $f(b) < f(a)$.
Or $b \in B$ donc $f(b) > 0$
et $a \in A$ donc $f(a) < 0$. Ce qui est absurde. D'où :

$$\forall\, a \in A \quad \text{et} \quad \forall\, b \in B \qquad a < b.$$

4°) D'aprés ce qui précède, A est une partie non vide (de $\mathbb{R}$) et majorée par n'importe quel élément de B. Donc A possède une borne supérieure $\alpha = \sup A$ qui vérifie :

$$\forall\, b \in B \qquad \alpha \leq b.$$

Ainsi, B est une partie non vide (de $\mathbb{R}$) minorée par α donc admet une borne inférieure

$$\beta = \inf B \text{ qui vérifie} \qquad \alpha \leq \beta.$$

Par ailleurs, on a $f(0) = -1 < 0$ donc $0 \in A$ et $0 < \alpha$ et $f(1) = 1 > 0$ donc $1 \in B$ et $b < 1$. D'où : $\qquad 0 < a \leq b < 1$

5°) a) Supposons qu'il existe $\varepsilon_0 > 0$ tel que :

$$\forall a \in A \text{ et } \forall b \in B \qquad b - a \geq \varepsilon_0.$$

D'où $\quad \exists \varepsilon_0 > 0 \quad \forall a \in A \quad \forall b \in B \quad b \geq a + \varepsilon_0$

Il en résulte que : $\quad \exists \varepsilon_0 > 0 \quad \forall a \in A \quad \beta \geq a + \varepsilon_0$

D'où $\quad \exists \varepsilon_0 > 0$ tel que $\beta \geq \alpha + \varepsilon_0$

Or nous savons que $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$. Donc :

$$\exists z_0 \in \mathbb{Q} \text{ tel que } \quad \alpha < \beta - \varepsilon_0/2 < z_0 < \beta.$$

Mais alors : $\quad z_0 < \beta \leq b \quad \forall b \in B$

donc $z_0 \notin B$ et $z_0 > \beta - \varepsilon_0/2 > \alpha \geq a \quad \forall a \in A$ donc $z_0 \notin A$.

Et par suite $z_0 \notin A \cup B$.

Or $z_0 \in \mathbb{Q}$ et $A \cup B = \mathbb{Q}$. Ce qui est absurde.

Et par conséquent :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists a \in A \quad \exists b \in B \quad \text{tels que } \quad 0 < b - a < \varepsilon.$$

b) Montrons que $\alpha = \beta$.

D'après ce qui précède :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists a \in A \quad \text{et} \quad \exists b \in B \quad \text{tels que} \quad a < b < a + \varepsilon.$$

D'où puisque $\alpha = \sup A$:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists a \in A \quad \exists b \in B \quad \text{tels que : } a < b < \alpha + \varepsilon.$$

Comme $\forall a \in A$ et $\forall b \in B \quad a \leq \beta \leq b$ on a :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists a \in A \quad \text{tel que} \quad a < \beta < \alpha + \varepsilon.$$

Or $\alpha \leq \beta$. d'où : $\forall \varepsilon > 0 \quad \alpha \leq \beta < \alpha + \varepsilon$.

Ou encore : $\forall \varepsilon > 0 \quad 0 \leq \beta - \alpha < \varepsilon$.

Ce qui montre que $(\beta - \alpha) = 0$ c'est à dire $\alpha = \beta$.

6°) a) Soit $0 < x < y < 1$. $\qquad$ (*)

Montrons que $0 < f(y) - f(x) < 4(y-x)$

On a déjà vu que : $f(y) - f(x) = (y - x)[y^2 + yx + x^2 + 1]$

D'où $\quad 0 < f(y) - f(x) < 4(y - x)$. d'après (*).

b) Supposons que $f(\alpha) > 0$.

D'après la propriété de la borne supérieure, on peut écrire, en choisissant $\varepsilon = 1/4n$, $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \exists x_n \in \mathbb{N} \quad / \quad \alpha - 1/4n < x_n \leq \alpha.$$

On en déduit alors que : $\quad f(x_n) < 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ car $x_n \in A$.

Et d'après la propriété précédente : $\quad 0 < f(\alpha) - f(x_n) < 4(\alpha - x_n) = 1/n$.

Ainsi $\{f(x_n)\}_n$ est une suite de nombres réels strictements négatifs qui converge vers un nombre strictement positif qui est $f(\alpha)$. Ce qui est absurde.

Par conséquent $f(\alpha) \leq 0$.

Une démonstration analogue prouve que $f(\beta) \geq 0$.

c) Comme on a vu que $\alpha = \beta$, d'après ce qui précède on a : $f(\alpha) = 0 = f(\beta)$. ■

1.11. Soit A un sous-ensemble non vide de $\mathbb{R}$. Un point $\alpha \in \mathbb{R}$ est dit <u>point d'accumulation</u> de A si pour tout $\varepsilon > 0$, l'intervalle $]\alpha - \varepsilon, \alpha + \varepsilon[$ contient un élément de A différent de α.

1°) Montrer que si α est un point d'accumulation de A, alors pour tout $\varepsilon > 0$, l'intervalle $]\alpha - \varepsilon, \alpha + \varepsilon[$ contient une infinité d'éléments de A (différents de α)

2°) Déterminer <u>tous</u> les points d'accumulation des ensembles suivants :

a) $A = \{ (-1)^n + 1/n \ / \ n \in \mathbb{N}^* \}$.

b) $B = \{ 1/n - 1/m \ / \ (n, m) \in (\mathbb{N}^*)^2 \ \ 0 < n \leq m \}$.

c) $C = \{ \dfrac{1}{n+1} + \cos\dfrac{n\pi}{3} \ / \ n \in \mathbb{N} \}$

Solution

1°) Soit α un point d'accumulation de A.

Par définition, pour tout $\varepsilon > 0$, l'intervalle $V_\varepsilon =]\alpha - \varepsilon, \alpha + \varepsilon[$ contient au moins un élément de A, distinct de α.

Ce qu'on peut écrire, pour $\varepsilon = 1/n$, $n \in \mathbb{N}^*$, comme suit :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad ( ]\alpha - 1/n , \alpha + 1/n [\setminus \{\alpha\}) \cap A \neq \emptyset.$$

Ou encore :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad \exists x_n \in A \ / \ 0 < |x_n - \alpha| < 1/n.$$

La suite $\{x_n\}_n$ ainsi construite est formée d'éléments de A, <u>tous</u> distincts de α, et qui converge vers α.

Cette suite ne peut être stationnaire, car sinon :

$$\exists k \in \mathbb{N}^* \qquad \forall n \in \mathbb{N}^* \qquad [n > k \Rightarrow x_n = x_k].$$

Ce qui est absurde, car $\{x_n\}_n$ converge vers α et non vers $x_k \neq \alpha$.

Ainsi l'ensemble $U = \{x_n / n \in \mathbb{N}^*\}$ est <u>infini</u> ($U \subset A$).

D'autre part, d'après la propriété d'Archimède :

$$\forall \varepsilon > 0 \qquad \exists n_0 \in \mathbb{N}^* \ / \ 0 < 1/n_0 < \varepsilon.$$

D'où $\qquad ( ]\alpha - 1/n_0 , \alpha + 1/n_0 [\setminus \{\alpha\}) \subset (V_\varepsilon \setminus \{\alpha\})$

Comme le premier ensemble contient une infinité d'éléments de A (distincts de α), il en est de même pour $V_\varepsilon \setminus \{\alpha\}$.

Remarque : L'ensemble des points d'accumulation de A est appelé <u>ensemble dérivé de A</u> et est noté A'.
Il est à noter que A' n'est pas nécessairement contenu dans A.

2°) Pour déterminer <u>tous</u> les points d'accumulation d'un ensemble, il suffit de chercher toutes les limites possibles de suites (infinies) d'éléments de cet ensemble :

a) $A = \{(-1)^n + 1/n \ / \ n \in \mathbb{N}^*\}$.

Les seuls points d'accumulations de A sont $\alpha = 1$ et $\beta = -1$

En effet : soit $x_n = (-1)^{2n} + \frac{1}{2n}$ et $y_n = (-1)^{2n+1} + \frac{1}{2n+1}$, $n \in \mathbb{N}^*$

$\{x_n\}_n$ (resp. $\{y_n\}_n$) est une suite d'éléments de A, tous distincts de 1 (resp.-1) et qui converge vers 1 (resp. -1). Donc $A' = \{-1, 1\}$.

b) $B = \{1/n - 1/m \ / \ (n, m) \in \mathbb{N}^{*2} \quad 0 < n \leq m\}$.

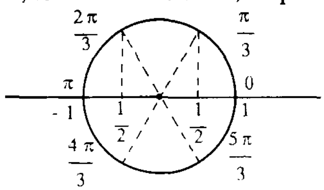
Tous les points $\alpha_n = 1/n$, $n \in \mathbb{N}^*$ sont des points d'accumulation de B. En effet, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ fixé, la suite $\{1/n - 1/m\}_m$ est convergente et tend vers $\alpha_n = 1/n$. D'autre part 0 est aussi un point d'accumulation de B. Car si l'on choisit $m = 2n$. et on pose $x_n = 1/n - 1/2n = 1/2n \quad n \in \mathbb{N}^*$

$\{x_n\}$ est une suite d'éléments de B, tous distincts de 0 et qui converge vers 0.

Par ailleurs les points de la forme $-1/m$ ne sont pas des points d'accumulation de B, car on ne peut pas construire de suite d'éléments de B, tous distincts de $-1/m$ qui converge vers $-1/m$.

Donc $B' = \{0\} \cup \{1/n \ / n \in \mathbb{N}^*\}$

c) $C = \{ \frac{1}{n+1} + \cos\frac{n\pi}{3} \ / n \in \mathbb{N} \}$



Lorsque n varie dans $\mathbb{N}$, $\cos n\pi/3$ prend ses valeurs dans $\{-1;-1/2;1/2;1\}$, indéfiniment

Ce qui nous permet de construire des suites d'éléments de C qui convergent vers -1, $-1/2$, $1/2$ ou 1.

Par exemple; la suite $x_n = \frac{1}{6(n+1)} + \cos((6n+5)\frac{\pi}{3})$

On a : $\forall\, n \in \mathbb{N} \quad x_n = \frac{1}{6(n+1)} + \frac{1}{2}$. qui converge vers 1/2.

On obtient ainsi $C' = \{ -1, -1/2, 1/2, 1 \}$. ■

1.12. Soit A une partie bornée et infinie, de $\mathbb{R}$. Soient a et b deux réels tels que : $A \subset [a, b]$. On définit l'ensemble :

$E = \{ x \in [a, b] \ / \ [a, x[\cap A \text{ est infini}\}$.

1°) Montrer que E est non vide et possède une borne inférieure α.

2°) Montrer que E est un intervalle. Est-il fermé ?

3°) Montrer que α est un point d'accumulation de A

Solution

Soit A une partie bornée et infinie de $\mathbb{R}$. Soit a et b deux réels tels que $A \subset [a, b]$. On définit : $E = \{x \in [a,b] \ / \ [a, x[\cap A \text{ est infini}\}$.

1°) Montrons que E est non vide et possède une borne inférieure α.

D'abord $b \in E$ puisque $[a, b[\cap A = A$ (ou $A \setminus \{b\}$) est infini. Donc $E \neq \emptyset$.

Comme $E \subset [a, b]$, donc E est une partie bornée et non vide de $\mathbb{R}$, elle possède une borne inférieure α (et aussi une borne supérieure β), avec α (et β) $\in [a, b]$.

2°) Montrons que E est un intervalle. Pour cela, il suffit de montrer que :

$$\forall (x_1, x_2) \in E^2 \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad [x_1 < x < x_2 \Rightarrow x \in E]$$

Soient $x_1 < x < x_2$, avec $(x_1, x_2) \in E^2$.

On a $[a, x_1[\subset [a, x[\subset [a,x_2[$.

Donc $([a, x_1[\cap A) \subset ([a, x[\cap A) \subset ([a, x_2[\cap A)$

Comme $x_1 \in E$, l'ensemble $[a, x_1[\cap A$ est infini. Par conséquent, l'ensemble $[a,x[\cap A$ est infini. Ce qui prouve que $x \in E$. Donc E est un intervalle.

E est - il fermé ?

Comme $\inf E = \alpha$, $E \subset [a,b]$, $b \in E$ et E est un intervalle, on pourrait déjà écrire que $E = [\alpha, b]$ ou bien $E =]\alpha, b]$. Seulement, on ne peut pas affirmer que E est fermé, puisqu'on peut avoir les 2 cas:

1er cas : Si $A = [0, 1]$ et $[a, b] = [0, 1]$.

$E = \{ x \in [0, 1] \ / \ [0, x[\cap [0, 1]$ est infini $\}$.

Il est clair que $0 \notin E$ puisque $[0, 0[= \emptyset$.

Comme $1 \in E$, $0 = \inf E$ et E est un intervalle, on a : $E =]0, 1]$.

Donc E <u>n'est pas fermé</u>.

2ème cas : Si $A = \{ (-1)^n/n \ / \ n \in \mathbb{N}^* \}$ et $[a, b] = [-1, 1]$.

$E = \{ x \in [-1, 1] \ / \ [-1, x[\cap A$ est infini $\}$.

Cette fois $0 \in E$ car $[-1, 0[\cap A = \{ \dfrac{-1}{2n+1} \ / \ n \in N \}$ qui est bien un ensemble infini.

Mieux encore, on a : $0 = \inf E$, car pour tout $\varepsilon > 0$, $-\varepsilon \notin E$

En effet, la suite $\dfrac{(-1)^n}{n}$ est convergente et tend vers 0.

Donc, par définition :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad [n > N \Rightarrow -\varepsilon < \frac{(-1)^n}{n} < \varepsilon]$$

donc $[-1, -\varepsilon[\cap A$ est un ensemble fini.

Par conséquent, 0 est le plus petit élément de E.

Comme $E \subset [-1, 1]$, $1 \in E$ et E est un intervalle, on a $E = [0, 1]$.

E est bien un intervalle <u>fermé</u>.

3°) Montrons que α est un point d'accumulation de A.

Par définition de $\alpha = \inf E$ on a :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists x \in E \ / \ \alpha \leq x < \alpha + \varepsilon.$$

Donc pour $\varepsilon = 1/n$.

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \exists x_n \in E \qquad \alpha \leq x_n < \alpha + 1/n.$$

On en déduit que $x_n \in E$ et $(x_n - 1/n) \notin E$.

Seulement, les x_n ne sont pas nécessairement dans A.

$x_n \in E$ donc $[a, x_n[\cap A$ est infini.

$(x_n - 1/n) \notin E$ donc $[a, (x_n - 1/n)[\cap A$ est fini.

D'où $[x_n - 1/n, x_n[\cap A$ est infini.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on choisit un élément y_n tel que :

$$y_n \in [x_n - 1/n, x_n[\cap A, \; y_n \neq \alpha \quad \text{et} \quad y_n \neq y_k \quad \forall\, k < n.$$

Ceci est possible car cet ensemble est infini.

Donc, la suite $\{y_n\}_n$, ainsi construite, est une suite (infinie) d'éléments de A , tous distincts de α et qui converge vers α.

Ce qui montre que α est un point d'accumulation de A . ■

1.13. Soit x le nombre : 0,234234234...234...
En comparant 1000x et x , écrire x sous la forme d'une fraction rationnelle a/b.

Solution

Soit $x = 0{,}234\,234\,234...234...$

$1000.x = 234{,}\,234\,234\,...234\,... = 234 + x.$

d'où $1000.x - x = 234.$

C'est à dire $999.x = 234.$

ou encore $x = 234/999.$

Ainsi x s'écrit bien sous la forme fractionnaire : a/b. ■

1.14. Tout élément x de $\mathbb{Q}$ est un nombre rationnel qui peut s'écrire de deux manières possibles (pour $x > 0$)

1°) écriture fractionnaire $x = a/b$.

2°) écriture décimale, qui comporte deux cas :

- une écriture limitée $x = \alpha_0\alpha_1...\alpha_k , \alpha_{k+1}...\alpha_n$.
- ou bien une écriture illimitée :

$$x = \alpha_0\alpha_1...\alpha_k , \alpha_{k+1}...\alpha_p\beta_1\beta_2...\beta_n\,\beta_1\beta_2...\beta_n...$$

Montrer que les deux écritures 1) et 2) du rationnel x, sont équivalentes.

$\alpha_0\alpha_1...\alpha_k$ s'appelle la partie entière

$\alpha_{k+1}...\alpha_p$ l'anti-période.

$\beta_1\beta_2...\beta_n$ la période.

Solution

Soit $x \in \mathbb{Q}$ $x > 0$.

Montrons qu'il y a équivalence entre les deux écritures 1) fractionnaire et 2) décimale limitée ou illimitée.

1) $\Rightarrow$ 2) . Soit $x = a/b$, $a \in \mathbb{N}^*$, $b \in \mathbb{N}^*$.

Exemple $3/4 = 0,75$.

et $1/7 = 0,142857\ 142857\ 142...$

Comme il y a au plus , b restes possibles, on effectue (au maximum) b divisions euclidiennes de $10^p.a$ par b, $p \in \{0, 1, 2, ..., b-1\}$. Ce qui donnera :

1ère division $a = b.q_0 + r_0$ avec $0 \leq r_0 \leq b$.

2ème division $10.a = b.q_1 + r_1$ avec $0 \leq r_1 < b$.

.

.

.

b-ième division $10^{b-1}.a = b.q_{b-1} + r_{b-1}$ avec $0 \leq r_{b-1} < b$.

Deux cas se présentent :

1er cas : $\exists\, p \in \{0, 1, 2,...,b-1\}$ tel que $r_p = 0$.

La division s'arrête, et dans ce cas $x = a/b$ admet une écriture décimale limitée :

$$x = \alpha_0\alpha_1...\alpha_k, \alpha_{k+1}...\alpha_n.$$

2ème cas : $\forall\, p \in \{0,1,2,...,b-1\}$ $r_p \neq 0$.

Mais alors, comme les valeurs des restes possibles sont prises dans l'ensemble $\{1,2,3..., b-1\}$; au bout de la b-ème division, au plus, il existera $p, s \in \{0,1,2...b-1\}$ tels que $r_p = r_s$. Car il y a b restes et seulement (b-1) valeurs possibles (le zéro étant exclu!).

Ainsi le processus de division effectué après la k-ème et celui effectué après la p-ème sont identiques.

Puis on recommence indéfiniment.Ce qui donne une écriture décimale illimitée de x.

$$x = \alpha_0\alpha_1...\alpha_k, \alpha_{k+1}... \alpha_p\beta_1\beta_2...\beta_n\beta_1\beta_2...\beta_n...$$

$\alpha_0\alpha_1...\alpha_k$ s'appelle la partie entière

$\alpha_{k+1}...\alpha_p$ l'anti-période

et $\beta_1\beta_2... \beta_n$ la période.

2) $\Rightarrow$ 1)

1er cas : $x = \alpha_0\alpha_1...\alpha_k\ , \ \alpha_{k+1}\ \alpha_{k+2}...\alpha_n$

$10^{n-k}.x \in \mathbb{N}$. donc $10^{n-k}.x = a \in \mathbb{N}$.

d'où $x = a/10^{n-k}$

et x est alors de la forme a/b.

2ème cas : $x = \alpha_0\alpha_1...\alpha_k\ , \ \alpha_{k+1}...\alpha_p\beta_1\beta_2... \beta_n\beta_1\beta_2... \beta_n ...$

$$10^{p-k}.x = \alpha_0\alpha_1...\alpha_k\alpha_{k+1}...\alpha_p\ , \beta_1\beta_2... \beta_n ...$$

$$10^{n+p-k}.x = \alpha_0\alpha_1...\alpha_k\alpha_{k+1}...\alpha_p\,\beta_1\beta_2... \beta_n\ , \beta_1\beta_2... \beta_n ...$$

Ainsi, si on pose $y_1 = \alpha_0\alpha_1...\alpha_k\alpha_{k+1}...\alpha_p \in \mathbb{N}$.

et $y_2 = \alpha_0\alpha_1...\alpha_k\alpha_{k+1}...\alpha_p\,\beta_1\beta_2... \beta_n \in \mathbb{N}$.

On a : $10^{n+p-k}.x - y_2 = 10^{p-k}.x - y_1$.

donc $(10^{n+p-k} - 10^{p-k})\,x = y_2 - y_1$.

D'où $b.x = a$.

où $a = (y_2 - y_1) \in \mathbb{N}^*$ et $b = (10^{n+p-k} - 10^{p-k}) \in \mathbb{N}^*$ ■

1.15. 1°) Montrer, en utilisant les notions de divisibilité et de facteurs premiers dans $\mathbb{N}$, que $\sqrt{2}$ est irrationnel.

2°) Soit $N \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $\sqrt{N}$ est rationnel si et seulement si N est un carré parfait.

Solution

1) Montrons que $\sqrt{2}$ est irrationnel. Par l'absurde.

Supposons qu'il existe deux entiers non nuls p et q , premiers entre eux tels que :

$$\sqrt{2} = p/q.$$

D'où $p^2 = 2q^2$. On en déduit que p^2 est pair.

Ce qui entraine que p est pair (car sinon $p = 2k + 1$ et $p^2 = 4k^2 + 4k + 1$ qui serait impair). D'où $p = 2k.$, $k \in \mathbb{N}^*$.

Mais alors $p^2 = 2q^2$ donne $4k^2 = 2q^2$ ou encore $q^2 = 2k^2$. Le même raisonnement que plus haut montre que q doit être pair.

Ainsi p et q sont tous deux pairs donc ne sont pas premiers entre eux. Ce qui est absurde et prouve que $\sqrt{2}$ est irrationnel.

2°) Montrons que [N carré parfait $\Leftrightarrow \sqrt{N}$ rationnel].

($\Rightarrow$) trivial, puisque si $N = \alpha^2$, $\alpha \in \mathbb{N}^*$.

$$\sqrt{N} = \alpha \in \mathbb{N}^* \subset \mathbb{Q}.$$

($\Leftarrow$) Supposons que $\sqrt{N}$ est rationnel : $\sqrt{N} = p/q$, avec p et q premiers entre eux.

Donc $Nq^2 = p^2$. Supposons que N n'est pas un carré parfait.

p divise p^2 donc p divise Nq^2 . Comme p et q sont premiers entre eux, p divise N.

D'où, il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $N = pk$. Mais alors on aura, après simplification : $p = q^2.k$. Un même raisonnement montre que p divise k. D'où, il existe $k' \in \mathbb{N}$ tel que $k = pk'$ et après simplifications, il vient : $1 = q^2.k$. q et k' étant des entiers, cette dernière égalité entraine que $k' = q = 1$. Il s'en suit que $k = 1$ et $p = 1$ et par conséquent $N = 1$. Ce qui est absurde puisque 1 est un carré parfait.

■

SUITES NUMERIQUES

2.1. Montrer que la somme d'une suite convergente et d'une suite divergente est une suite divergente.

Solution

Soit $\{u_n\}$ une suite convergente et soit $\{v_n\}$ une suite divergente. Si la suite de terme général $w_n = u_n + v_n$ converge il en est de même pour la suite $w_n - u_n = v_n$ ce qui contredit l'hypothèse.

■

2.2. Montrer que si la suite $\{u_n\}$ converge vers ℓ alors $\{|u_n|\}$ converge vers $|\ell|$. Et la réciprioque?

Solution

Montrons que : $\forall\, x, y \in \mathbb{R}$

(1) $$\big|\, |x| - |y| \,\big| \leq |x - y|$$

En écrivant $x = x - y + y$ et $y = y - x + x$ on a :

$$|x| \leq |x - y| + |y|$$
$$|y| \leq |x - y| + |x|$$

Ce qui implique que :

$$-|x - y| \leq |x| - |y| \leq |x - y| \text{, soit la relation (1).}$$

$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, N \in \mathbb{N} \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$

$$(n \geq N \Rightarrow |u_n - \ell| < \varepsilon)$$

or $\big|\, |u_n| - |\ell| \,\big| \leq |u_n - \ell|$ ainsi $(n \geq N \Rightarrow \big|\, |u_n| - |\ell| \,\big| < \varepsilon)$.

<u>La réciproque est fausse</u> : si $u_n = (-1)^n$

$\{|u_n|\}$ converge vers 1 mais $\{u_n\}$ diverge.

on a cependant l'implication

$$|u_n| \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0 \text{ entraine que } u_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0.$$

■

2.3. Soit $\{u_n\}$ une suite numérique telle que ses suites extraites $\{u_{2n}\}$, $\{u_{2n+1}\}$ et $\{u_{3n}\}$ convergent respectivement vers ℓ, ℓ', ℓ''. Montrer que $\{u_n\}$ est convergente vers ℓ et que $\ell = \ell' = \ell''$.

Solution

La suite $\{u_{6n}\}$ est une suite extraite à la fois de $\{u_{2n}\}$ et $\{u_{3n}\}$. Donc elle converge à la fois vers ℓ et ℓ''. Et d'aprés l'unicité de la limite on a : $\ell = \ell''$.
De même puisque $\{u_{3(2n+1)}\}$ est une suite extraite à la fois de $\{u_{2n+1}\}$ et de $\{u_{3n}\}$
On en déduit alors que $\ell' = \ell''$.
Finalement on a : $\ell = \ell' = \ell''$.
Soit $\varepsilon > 0$. Comme $\lim\limits_{n\to\infty} u_{2n} = \ell = \lim\limits_{n\to\infty} u_{2n+1}$, on a :

(1) $\exists N_1 \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad [n > N_1 \Rightarrow |u_{2n} - \ell| < \varepsilon]$

(2) $\exists N_2 \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad [n > N_2 \Rightarrow |u_{2n+1} - \ell| < \varepsilon]$.

Posons $N = \sup(2N_1, 2N_2 + 1)$.
Ainsi l'égalité $|u_n - \ell| < \varepsilon$ est vérifiée par tous les entiers $n > N$.
Ce qui montre que $\{u_n\}$ est convergente et tend vers ℓ. ∎

2.4. Etudier la nature des suites définies par :

a) $$x_n = \frac{1}{n^2+1} + \frac{1}{n^2+2} + \dots + \frac{1}{n^2+2n+1}.$$

b) $$y_n = \frac{n}{\sqrt{n^4+1}} + \frac{n}{\sqrt{n^4+2}} + \dots + \frac{n}{\sqrt{n^4+n}}.$$

c) $$z_n = \frac{\log n}{\sqrt{n^3+1}} \qquad n \in \mathbb{N}^*.$$

Solution

a) Pour tout $k \in \{1, 2, 3, \dots, 2n+1\}$ on a :

$$\frac{1}{n^2+(2n+1)} \le \frac{1}{n^2+k} \le \frac{1}{n^2+1}$$

En faisant varier k, puis en prenant la somme membre à membre des $(2n+1)$ inégalités, il s'en suit :

$$u_n \le x_n \le v_n \qquad \text{où} \qquad u_n = \frac{(2n+1)}{(n+1)^2} \quad \text{et} \quad v_n = \frac{(2n+1)}{n^2+1}$$

Comme les deux suites $\{u_n\}$ et $\{v_n\}$ sont convergentes et tendent vers zéro, la suite $\{x_n\}$ est convergente et tend également vers zéro.

b) Un raisonnement identique au précédent montre que :

$$u_n \leq y_n \leq v_n \quad \text{où} \quad u_n = \frac{n^2}{\sqrt{n^4 + n}} \quad \text{et} \quad v_n = \frac{n^2}{\sqrt{n^4 + 1}}$$

Comme $\{u_n\}$ et $\{v_n\}$ sont convergentes et tendènt vers 1 , la suite $\{y_n\}$ est convergente et tend également vers 1.

c) $$z_n = \frac{\text{Log } n}{\sqrt{n^3 + 1}}$$

Nous savons que $\forall\, x \in \mathbb{R}+^*$ $\quad \text{Log } x < x$.

D'où $$0 \leq z_n \leq \frac{n}{\sqrt{n^3 + 1}}$$

La suite définie par le membre de droite est convergente et tend vers zéro. Donc il en est de même de $\{z_n\}$ ■

2.5. Etudier la convergence et déterminer la limite, lorsqu'elle existe, de la suite $\{u_n\}$ définie par :

$$u_n = \frac{a^n - b^n}{a^n + b^n}.$$

où a et b sont des réels tels que $|a| \neq |b|$.

Solution

On distingue deux cas possibles :

1er cas : $|a| < |b|$. Ceci entraine d'après l'hypothèse que $b \neq 0$. Posons alors $k = a/b$.

Ainsi : $$u_n = \frac{k^n - 1}{k^n + 1}$$

Or $|k| < 1$ donc la suite géométrique $\{k^n\}$ est convergente et tend vers zéro.

D'où $\{u_n\}$ est une suite convergente et on a : $u_n \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} -1$.

2ème cas : $|a| > |b|$. Comme plus haut, ceci entraîne que $a \neq 0$. Posons alors $k = b/a$.

On a : $$u_n = \frac{1 - k^n}{1 + k^n}$$

Puisque $|k| < 1$. Il s'en suit que $\{u_n\}$ est une suite convergente et que $u_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 1$.

■

2.6. Soit $\{u_n\}$, $n \in \mathbb{N}^*$ une suite numérique convergeant vers $\ell \in \mathbb{R}$.
Appelons v_n la moyenne arithmétique (Somme de Césaro) :

$$v_n = \frac{u_1 + u_2 + \ldots + u_n}{n}$$

Montrer que $\{v_n\}$ converge également vers ℓ.

Solution

C'est un résultat classique généralement vu en cours.

Soit $\varepsilon > 0$. Puisque $\{u_n\}$ converge vers ℓ :

$\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$

(1) $[\, n > n_0 \Rightarrow |u_n - \ell| < \varepsilon/2 \,]$

Soit $n > n_0$. $$v_n - \ell = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} u_k - \ell = \frac{1}{n}\left[\left(\sum_{k=1}^{n} u_k\right) - n\ell\right]$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(u_k - \ell)$$

$$|v_n - \ell| \leq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n_0}|u_k - \ell| + \frac{1}{n}\sum_{k=n_0+1}^{n}|u_k - \ell|$$

Il en résulte de (1) et en posant

$$A = \sum_{k=1}^{n_0}|u_k - \ell|$$

$$|v_n - \ell| < \frac{A}{n} + \frac{n - n_0}{n}\,\frac{\varepsilon}{2}$$

$$< \frac{A}{n} + \frac{\varepsilon}{2}$$

$\lim_{n \to +\infty} A/n = 0$ il existe alors $n_1 \in \mathbb{N}$ tel que $[\, n > n_1 \Rightarrow A/n < \varepsilon/2 \,]$.

Posons $N = \max(n_0, n_1)$ on a $\forall\, n \in \mathbb{N}$ $[\, n > N \Rightarrow |v_n - \ell| < \varepsilon \,]$

Ce qui montre que $\{v_n\}$ est convergente et tend vers ℓ.

■

2.7. Soit $\{ u_n \}$, $n \in \mathbb{N}^*$ une suite de réels strictement positifs convergeant vers $\ell \in \mathbb{R}+^*$. Appelons v_n la moyenne géométrique :

$$v_n = \sqrt[n]{u_1 \cdot u_2 \ldots u_n}$$

Montrer que $\{v_n\}$ converge également vers ℓ .

Solution

Posons $w_n = \text{Log } u_n$, $n \in \mathbb{N}^*$

$$\text{Log } v_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} w_k$$

qui n'est autre que la moyenne arithmétique de la suite $\{w_n\}$. $\{\text{Log } v_n\}$ converge donc vers la même limite que la suite $\{w_n\}$ (voir exercice 2.6.).

Ainsi $\lim\limits_{n \to +\infty} \text{Log } v_n = \text{Log } \ell$ et donc $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = \ell$.

puisque la fonction exponentielle est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}^{*+}$. ■

2.8. Soit $\{x_n\}$, $n \in \mathbb{N}$ une suite numérique telle que $\lim\limits_{n \to +\infty} x_{n+1} - x_n = \ell$. Etablir que $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n/n = \ell$

Solution

Posons $u_n = x_n - x_{n-1}$

et $v_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} u_n$ pour $n \in \mathbb{N}^*$

Ainsi $\{u_n\}$ et sa moyenne arithmétique $\{v_n\}$ convergent vers ℓ (voir 2.6.)

or $v_n = x_n/n - x_0/n$.

Ainsi $\{x_n/n\}$ converge vers ℓ. ■

2.9. Soit $\{x_n\}$, $n \in \mathbb{N}$, une suite de réels strictement positifs telle que

$\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \ell$, $\ell > 0$. Etablir que $\lim\limits_{n \to +\infty} \sqrt[n]{x_n} = \ell$

Solution

Posons $u_n = \frac{x_n}{x_{n-1}}$

$$v_n = \sqrt[n]{u_1 \cdot u_2 \cdot \ldots u_n} \qquad n \in \mathbb{N}^*$$

$\{u_n\}$ converge vers ℓ. Il en est donc de même pour sa moyenne géométrique $\{v_n\}$.

or $v_n = \sqrt[n]{x_n} \cdot \sqrt[n]{1/x_0}$ donc $\sqrt[n]{1/x_0} = e^{-\frac{\operatorname{Log} x_0}{n}}$ tend vers 1 pour tout $x_0 > 0$.

on conclut que $\lim\limits_{n \to +\infty} \sqrt[n]{x_n} = \ell$ ■

2.10.

> Soit $\{u_n\}$ une suite numérique telle que : $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \ell$
>
> Etablir que :
>
> 1°) $|\ell| < 1 \Rightarrow$ $\{u_n\}$ converge vers 0
>
> 2°) $|\ell| > 1 \Rightarrow$ $\{u_n\}$ diverge
>
> 3°) Que peut-on dire concernant la convergence de la suite si $|\ell| = 1$
>
> 4°) Application : Etudier les suites définies par
>
> $$u_n = \frac{n^k}{x^n} \qquad v_n = \frac{x^n}{n!} \quad \text{avec } k \in \mathbb{N}^*, x \in \mathbb{R}^*.$$

Solution

Remarquons tout d'abord que si $\{|u_n|\}$converge vers 0 il en est de même pour $\{u_n\}$ et si $\{|u_n|\}$ diverge alors $\{u_n\}$ diverge également .
Il suffit donc d'établir ces implications pour la suite $\{|u_n|\}$.
Ce qui revient à supposer que la suite $\{u_n\}$ est à termes positifs.

1°) Supposons $\ell < 1$ $(\ell \geq 0)$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \left[n \geq N \Rightarrow \ell - \varepsilon < \frac{u_{n+1}}{u_n} < \ell + \varepsilon\right] \qquad (1)$$

Soit $\varepsilon \in]0,1-\ell[$. Posons $q = \ell + \varepsilon$. on a $0 < q < 1$

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \left[n \geq N \Rightarrow 0 \leq \frac{u_{n+1}}{u_n} < q\right]$$

on en déduit que : $[\, n > N \Rightarrow 0 \leq u_n < q^{n-N} u_N\,]$

Et puisque $\{q^{n-N} u_N\} \to 0$ lorsque $n \to +\infty$, la suite $\{u_n\}$, qui est à termes positifs converge vers 0.

2°) $\ell > 1$

Prenons maintenant dans (1) $\varepsilon \in]0, \ell-1[$. Posons $q = \ell - \varepsilon$

On a $q > 1$. On déduit de (1) que $\forall n \in \mathbb{N}$ $\left[n \geq N \Rightarrow \dfrac{u_{n+1}}{u_n} > q\right]$

Ce qui entraîne que :

$\forall n \in N \qquad [n > N \Rightarrow u_n > q^{n-N} u_N]$

La suite $\{q^{n-N} u_N\}$ tend vers $+\infty$ quand $n \to +\infty$ puisque $q > 1$.

Il en est de même pour la suite $\{u_n\}$.

3°) Si $\ell = 1$ (ou $\ell = -1$) on ne peut rien dire :

Si $u_n = n$ on a $\ell = 1$ mais $\{u_n\}$ diverge

Si $u_n = 1/n$ on a $\ell = 1$ mais $\{u_n\}$ converge vers 0

4°) a) $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{(n+1)^k}{x^{n+1}} \dfrac{x^n}{n^k}$

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{x}$$

Par conséquent : si $|x| > 1$ alors $\{u_n\} \to 0$

si $|x| < 1$, $\{u_n\}$ diverge

si $x = 1$ $u_n = n^k$ $u_n \to +\infty$. $\{u_n\}$ diverge

si $x = -1$ $u_n = (-1)^n n^k$ $\{u_n\}$ diverge.

b) $\dfrac{v_{n+1}}{v_n} = \dfrac{x^{n+1}}{(n+1)!} \dfrac{n!}{x^n}$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{v_{n+1}}{v_n} = 0$$ ainsi $v_n \to 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}^*$.

Comme pour $x = 0$, $\{v_n\}$ est la suite constante et égale à 0 ($n \in \mathbb{N}^*$), il s'en suit que $\{v_n\}$ est convergente et tend vers 0 pour tout $x \in \mathbb{R}$. ■

2.11. Montrer que les suites définies par : $u_n = \sum_{k=0}^{n} \dfrac{1}{k!}$ et $v_n = \sum_{k=0}^{n} \dfrac{ak+b}{k!}$.

convergent et determiner leurs limites .

Solution

$u_{n+1} = u_n + \dfrac{1}{(n+1)!}$ donc $\{u_n\}$ est strictement croissante.

Montrons qu'elle est majorée par 3.

$\dfrac{1}{2!} \leq \dfrac{1}{2}$, $\dfrac{1}{3!} = \dfrac{1}{2x3} \leq \dfrac{1}{2^2}$ et plus généralement, il est facile de voir que $\dfrac{1}{k!} \leq \dfrac{1}{2^{k-1}}$

pour tout $k > 1$.

Ainsi $u_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{n!}$

$$\leq 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}}$$

Il s'en suit que : $u_n \leq 1 + \dfrac{1 - (1/2^n)}{1 - (1/2)}$

$$\leq 1 + 2\,(1 - 1/2^n) \leq 3.$$

La suite $\{u_n\}$ étant croissante et majorée, elle est convergente.

Appelons e sa limite.

$$v_n = b + \frac{a+b}{1!} + \frac{2a+b}{2!} + \ldots + \frac{na+b}{n!}$$

$$= b\left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!}\right) + a\left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{(n-1)!}\right)$$

D'où $v_n = b.u_n + a.u_{n-1}$.

Comme les deux suites $\{u_n\}$ et $\{u_{n-1}\}$ sont convergentes et tendent vers e , il s'en suit que $\{v_n\}$ est également convergente et $\lim\limits_{n \to \infty} v_n = (a + b)\,.e$. ■

2.12. Soit f une fonction continue [0, 1] et admettant une dérivée à droite au point 0, égale à $\lambda \in \mathbb{R}$.

On suppose , de plus, que $f(0) = 0$. Posons pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$S_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \ldots + \frac{1}{2n}$$

$$S_n(f) = f\left(\frac{1}{n}\right) + f\left(\frac{1}{n+1}\right) + \ldots + f\left(\frac{1}{2n}\right)$$

1°) Montrer que $\{S_n\}$ converge vers une limite S.

2°) Montrer que $\{S_n(f)\}$ converge vers λS.

3°) Calculer $S_n(f)$ lorsque $f(x) = \text{Log}\,(1+x)$.

4°) En déduire la valeur de S.

Solution

1°) Montrons que $\{S_n\}$ est décroissante minorée.

$$S_{n+1} - S_n = \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{n} \leq \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} - \frac{1}{n} = 0$$

Donc la suite $\{S_n\}$ est décroissante.

D'autre part , pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $S_n > 0$.

D'où $\{S_n\}$ est décroissante, minorée par 0, elle est convergente vers une limite S.

2°) $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lambda$ et $f(0) = 0$ entraînent que :

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, \eta > 0 \quad \text{tel que} \quad [\, 0 < x < \eta \;\Rightarrow\; |\, f(x)/x - \lambda \,| < \varepsilon \,].$$

Soit $N \in \mathbb{N}^*$ tel que $N > 1/\eta$, on a :

$\forall N \in \mathbb{N}^*$ $[n > N \Rightarrow 0 < 1/n < \eta \Rightarrow | n . f(1/n) - \lambda | < \varepsilon]$

Ainsi , la suite de terme général $u_n = n.f(1/n)$ converge vers λ.

Il suffit alors de montrer que la suite de terme général $(S_n(f) - u_n.S_n)$ converge vers 0

Or $S_n(f) - u_n . S_n = \left(\frac{u_n}{n} + \frac{u_{n+1}}{n+1} + \ldots + \frac{u_{2n}}{2n}\right) - \left(\frac{u_n}{n} + \frac{u_n}{n+1} + \ldots + \frac{u_n}{2n}\right)$

$$| S_n(f) - u_n.S_n | \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{| u_{n+k} - u_n |}{n + k} \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} | u_{n+k} - u_n |$$

Or $\{u_n\}$ est une suite convergente vers λ, donc c'est une suite de Cauchy et on a :

$\forall \varepsilon > 0$ $\exists N \in \mathbb{N}$ $\forall (n, m) \in \mathbb{N}^2$ $[m \geq n > N \Rightarrow | u_m - u_n | < \varepsilon]$.

Ainsi si $n > N$ $\forall k \in N$ $| u_{n+k} - u_n] < \varepsilon$.

D'où si $n > N$ $| S_n(f) - u_n.S_n | < n.\varepsilon/n = \varepsilon$.

Ce qui prouve que $\{ (S_n (f) - u_nS_n) \}$ converge vers 0.

Comme les deux suites $\{u_n\}$ et $\{S_n\}$ sont convergentes et tendent respectivement vers λ et S, il s'en suit que la suite $\{S_n(f) \}$ est convergente et tend vers λS.

3°) Si $f(x) = Log(1+x)$, f est définie et continue sur [0, 1]. De plus f est dérivable à droite en 0 et $f'_d(0) = 1 = \lambda$. On a :

$$S_n(f) = Log\left(1 + \frac{1}{n}\right) + Log\left(1 + \frac{1}{n+1}\right) + \ldots + Log\left(1 + \frac{1}{2n}\right)$$

$$= Log\left(\frac{n+1}{n}\right) + Log\left(\frac{n+2}{n+1}\right) + \ldots + Log\left(\frac{2n+1}{2n}\right) = Log\left(\frac{2n+1}{n}\right)$$

Ainsi la suite $\{S_n(f)\}$ est convergente et tend vers Log 2.

4°) Comme $\lambda = 1$ et $\lambda.S = Log\ 2$ on a $S = Log\ 2$. ■

2.13. Considérons les fonctions $f(x) = a\sin x + b$, $g(x) = a\sin x + b - x$ avec $a \in]-1, 1[$, $b \in \mathbb{R}$

1°) Montrer que g s'annule en un unique point α.

2°) Montrer que f est contractante, c'est à dire que :

$$\exists k \in]0, 1[\quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 : | f(x) - f(y) | \leq k | x - y |.$$

3°) En déduire que la suite $\{x_n\}$ définie par $x_0 \in \mathbb{R}$ et $x_{n+1} = f(x_n)$ converge vers α.

Solution

1°) $\lim_{x \to -\infty} g(x) = +\infty$ et $\lim_{x \to +\infty} g(x) = -\infty$. Ainsi

$\exists X \in \mathbb{R} , \exists Y \in \mathbb{R}$ tels que $X < Y$ et $g(X) > 0$ et $g(Y) < 0$

puisque g est continue : $\exists \alpha \in]X, Y[$ tel que $g(\alpha) = 0$

$g'(x) = a \cos x - 1 < 0$ pour tout x.

g est donc strictement décroissante. Ce qui montre l'unicité de α.

Ainsi, f admet un unique point fixe α. ($f(\alpha) = \alpha$).

2°) $f(x) - f(y) = a(\sin x - \sin y) = 2a \cos \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2}$

$$|f(x) - f(y)| \leq 2|a| \left|\frac{x-y}{2}\right|$$

puisque $|\sin z| \leq z$ pour tout z.
f est donc contractante de cœfficient $k = |a|$.
3°) On va montrer que la suite $\{x_n\} \to \alpha$ lorsque $n \to +\infty$
Etablissons directement ce résultat.

$\forall n \in \mathbb{N} \qquad |x_{n+1} - \alpha| = |f(x_n) - f(\alpha)| \leq k |x_n - \alpha|$

On a par une recurrence simple :

$\forall n \in \mathbb{N} \qquad |x_n - \alpha| \leq k^n |x_0 - \alpha|$

$0 < k < 1$ entraîne que $\{x_n - \alpha\} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$. Ce qui montre le résultat.

■

2.14. Soit $a \geq 1$. On considère les deux suites définies par :

$$u_0 = a \quad , \quad v_n = \frac{a}{u_n} \qquad \text{et} \qquad u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}$$

1°) Montrer que $\{u_n\}$ et $\{v_n\}$ sont deux suites adjacentes.
2°) Calculer leur limite commune.

Solution

1°) Montrons que les 2 suites $\{u_n\}$ et $\{v_n\}$ sont adjacentes . Remarquons tout d'abord que $u_n > 0$, $v_n > 0$ pour tout n.

a) $$u_{n+1} - u_n = \frac{u_n + v_n}{2} - u_n$$
$$= \frac{v_n - u_n}{2} = \frac{a - u_n^2}{2u_n} = \frac{(\sqrt{a} - u_n)(\sqrt{a} + u_n)}{2u_n}$$

Ainsi le sens de variation de la suite $\{u_n\}$ dépend du signe de $(\sqrt{a} - u_n)$. Or on a :

$$(u_{n+1} - \sqrt{a}) = \frac{u_n^2 + a}{2u_n} - \sqrt{a}$$
$$= \frac{u_n^2 - 2u_n\sqrt{a} + a}{2u_n} = \frac{(u_n - \sqrt{a})^2}{2u_n} \geq 0$$

Ce qui montre que la suite $\{u_n\}$ est décroissante et que $u_n - v_n \geq 0$ pour tout n.

b) D'autre part, comme pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\frac{v_n + 1}{v_n} = \frac{u_n}{u_{n+1}} \geq 1$$

la suite $\{v_n\}$ varie dans le sens contraire de celui de $\{u_n\}$. Donc elle est croissante.

c) Il reste à montrer que $\lim\limits_{n \to \infty} (u_n - v_n) = 0$

Or, comme $\{v_n\}$ est croissante, on a :

$$(u_{n+1} - v_{n+1}) \leq (u_{n+1} - v_n)$$

$$= \frac{u_n + v_n}{2} - v_n = 1/2\,(u_n - v_n)$$

Et par conséquent :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}. \qquad 0 \leq (u_n - v_n) \leq \frac{1}{2^n}(u_o - v_o)$$

On en déduit que $\lim\limits_{n \to \infty} (u_n - v_n) = 0.$

Ce qui prouve que les deux suites $\{u_n\}$ et $\{v_n\}$ sont adjacentes . Donc elles sont convergentes et tendent vers une même limite ℓ.

2°) ℓ doit vérifier les 2 relations déduites des définitions :

$$\ell = a/\ell \qquad \text{et} \qquad \ell = (\ell + \ell)/2.$$

Ce qui donne $\ell = \pm\sqrt{a}$

Comme les 2 suites $\{u_n\}$ et $\{v_n\}$ sont positives, il s'en suit que $\boxed{\ell = \sqrt{a}}$ ■

2.15.

> Soient a et b des réels tels que $0 < a < b$.
> Définissons les suites $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, $n \in \mathbb{N}$, par :
> $a_0 = a$ et $b_0 = b$ et $a_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}$ $\quad b_{n+1} = \dfrac{a_n + b_n}{2}$
> Montrer que ces suites sont adjacentes.

Solution

Etablissons par réccurence que : pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$0 < a_n < a_{n+1} < b_{n+1} < b_n \qquad (1)$$

Puisque $0 < a < b$ on a bien $0 < a_0 < a_1$ et $b_1 < b_0$.

D'autre part $b_1 - a_1 = \dfrac{a+b}{2} - \sqrt{ab} = \dfrac{a + b - 2\sqrt{ab}}{2}$

$$= \frac{(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2}{2} > 0$$

Supposons maintenant la relation (1) verifiée

$a_{n+1} < b_{n+1}$ entraîne que $a_{n+1} < a_{n+2}$ et $b_{n+2} < b_{n+1}$

Par ailleurs $\quad b_{n+2} - a_{n+2} = \dfrac{a_{n+1} + b_{n+1} - 2\sqrt{a_{n+1}b_{n+1}}}{2}$

$$= \frac{(\sqrt{a_{n+1}} - \sqrt{b_{n+1}})^2}{2}$$

ce qui montre que $\quad 0 < a_{n+1} < a_{n+2} < b_{n+2} < b_{n+1}$.

Les suites $\{a_n\}$ et $\{b_n\}$ sont donc respectivement croissante majorée par b_0 et décroissante minorée par a_0. Appelons ℓ et ℓ' les limites respectives.

On déduit de $b_{n+1} = \dfrac{a_n + b_n}{2}$ que $\ell' = \dfrac{\ell + \ell'}{2}$

ce qui montre que $\ell = \ell'$ et achève la démonstration. ■

2.16.

> Soit u_0 et v_0 deux réels tels que $0 < u_0 < v_0$
> On définit deux suites $\{u_n\}$ et $\{v_n\}$ par :
>
> $$u_{n+1} = \frac{2u_n v_n}{u_n + v_n} \qquad \text{et} \qquad v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}$$
>
> 1°) Montrer que :
>
> $$\forall\ n \in \mathbb{N} \qquad 0 < u_n < v_n$$
>
> 2°) En déduire que les suites $\{u_n\}$ et $\{v_n\}$ convergent vers la même limite.

Solution

1°) Raisonnons par réccurence. La propriété est vraie pour $n = 0$.

Supposons $0 < u_n < v_n$.

Il en résulte immédiatement que $u_{n+1} > 0$.

Par ailleurs $(v_n - u_n)^2 = v_n^2 - 2\,u_n\,v_n + u_n^2 > 0$ entraine que $v_n^2 + u_n^2 > 2\,u_n\,v_n$

d'où $(v_n + u_n)^2 = v_n^2 + 2\,u_n\,v_n + u_n^2 > 4\,u_n\,v_n$.

Par conséquent : $\dfrac{v_n + u_n}{2} > \dfrac{2\,u_n\,v_n}{u_n + v_n}$ d'où $v_{n+1} > u_{n+1}$

2°) La suite $\{v_n\}$ est décroissante . En effet :

$$v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} < v_n$$

puisque la suite $\{v_n\}$ est minorée par 0 elle converge donc vers un réel v.

Par ailleurs, $u_{n+1} = \dfrac{2\,u_n\,v_n}{u_n + v_n} = u_n \dfrac{v_n}{v_{n+1}} > u_n$ pour tout n , car $\dfrac{v_n}{v_{n+1}} > 1$

Ainsi la suite $\{u_n\}$ est croissante majorée par v_0, appelons u sa limite.

Il résulte de la relation $v_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{2}$ que $v = \dfrac{u + v}{2}$ et finalement $u = v$. ■

2.17. Soit $\{u_n\}$ une suite de nombres réels strictement positifs tels que :

$$\forall n \geq 1 \qquad u_n = \sqrt{u_{n-1} \cdot u_{n+1}}$$

A quelle condition sur u_0, u_1 la suite est - elle convergente?

Solution

Posons $v_n = \text{Log } u_n$. On a :

$$v_n = 1/2\,(v_{n-1} + v_{n+1})$$

$$v_{n+1} - v_n + v_{n-1} = 0$$

C'est une suite de Fibonacci d'équation caractéristique :

$$r^2 - 2r + 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad r = 1.$$

Ainsi, $\quad v_n = \alpha r^n + \beta n r^n = \alpha + \beta n.$

$$\alpha = v_o \qquad \beta = v_1 - v_o$$

$$v_n = v_o + n(v_1 - v_o)$$

$$\text{Log } u_n = \text{Log } u_o + n \text{ Log } \frac{u_1}{u_o}$$

$$u_n = u_0 \cdot \left(\frac{u_1}{u_o}\right)^n$$

Finalement $\{u_n\}$ converge si et seulement si $u_1 \leq u_0$ ■

2.18. Soit $\{u_n\}$ la suite définie par $u_o \in \mathbb{R}$ et la relation $u_{n+1} = au_n+b$, $n \in \mathbb{N}$.
Etudier suivant les valeurs de a, b, u_o la convergence de $\{u_n\}$.

Solution

Si $a = 1$ la suite $\{u_n\}$ est arithmétique de raison b. Elle ne peut converger que si $b = 0$, auquel cas la suite $\{u_n\}$ est constante.

Si $a \neq 1$ l'équation $\ell = a\,\ell + b$ admet une racine unique $\ell = b/(1-a)$

si $u_0 = \ell$ la suite $\{u_n\}$ est constante et $u_n = \ell$ pour tout n.

si $u_0 \neq \ell$ on a $(u_{n+1} - \ell) = a\,(u_n - \ell)$

La suite de terme général $v_n = u_n - \ell$ est géométrique de raison a. On a :

$$u_n - \ell = a^n\,(u_0 - \ell)$$

Une condition nécessaire et suffisante pour que $\{u_n\}$ converge est que $|a| < 1$.

Elle admet alors pour limite $b/(1-a)$. ■

2.19. La première année de sa création une société de fabrication automobile a produit $P_1 = 450$ unités. La deuxième année $P_2 = 720$ unités. Appelons P_n la production de l'année n.
On suppose que la production annuelle évolue suivant le modèle suivant :

$$P_{n+2} = 3\,\Delta P_{n+1} + \frac{3}{4} P_n$$

où $\Delta P_{n+1} = P_{n+1} - P_n$ désigne l'accroissement de la production de l'année n +1.

a - Déterminer la production annuelle P_n en fonction de n.

b - En déduire le taux d'accroissement $\dfrac{\Delta P_n+1}{\Delta P_n}$

Solution

a - $P_{n+2} = 3(P_{n+1} - P_n) + 3/4\ P_n$.

$P_{n+2} - 3P_{n+1} + 9/4\ P_n = 0$

$\{P_n\}$ est une suite de Fibonacci d'équation caractéristique :

$r^2 - 3r + 9/4 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad r = 3/2.$

Ainsi $P_n = r^n (A + nB)$

Pour n = 1 et 2 on a :

$$\left.\begin{array}{l} 450 = 3/2\,(A + B) \\ 720 = 9/4\,(A+2B) \end{array}\right\} \Rightarrow A = 280 \text{ et } B = 20, \text{ d'où } Pn = (3/2)^n(280 + 20n).$$

b - $\Delta P_{n+1} = r^{n+1} (A + (n + 1)B - r^n (A + nB)$

$= r^n\,[\,(r - 1)\,(A - nB) + rB\,]$

$$\left.\begin{array}{l} \Delta P_{n+1} = (3/2)^n\,(170 + 10\,n) \\ \Delta P_n \quad = (3/2)^{n-1}\,(160 + 10n) \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{\Delta P_{n+1}}{\Delta P_n} = \frac{3}{2} \cdot \frac{17+n}{16+n}$$

■

2.20. Soit $\{u_n\}$ la suite définie par ses premiers termes u_o et u_1, avec $u_o \neq u_1$ et la relation de réccurence

$$u_{n+2} = au_{n+1} + (1 - a)\,u_n \qquad \text{pour } n \in \mathbb{N}.$$

Donner une condition nécessaire et suffisante sur le paramètre réel a pour que cette suite converge . Donner alors sa limite ℓ.

Solution

Posons $v_n = u_{n+1} - u_n$, $n \in \mathbf{N}$

$v_{n+1} = u_{n+2} - u_{n+1} = au_{n+1} + (1 - a)u_n - u_{n+1} = (a - 1)\,(u_{n+1} - u_n)$

$\{v_n\}$ est donc une suite géométrique de raison $r = a - 1$.

$v_n = r^n v_0$, $v_0 = u_1 - u_0 \neq 0$

Si $\{u_n\}$ converge vers ℓ, alors $\{v_n\}$ converge vers 0 ce qui entraîne que $|r| < 1$ et finalement $0 < a < 2$.

Réciproquement, montrons que si $0 < a < 2$ alors $\{u_n\}$ est convergente :

$$u_1 - u_0 = v_0$$
$$u_2 - u_1 = rv_0$$
$$\vdots$$
$$u_n - u_{n-1} = r^{n-1} . v_0$$

En sommant terme à terme, on obtient :

$$u_n - u_0 = v_0\left(\frac{1 - r^n}{1 - r}\right)$$

donc : $$u_n = u_0 + (u_1 - u_0)\frac{1 - r^n}{1 - r} \qquad \text{avec} \quad r = a - 1$$

$a \in \,]0\,,2\,[$ entraine que $r_n \to 0$ lorsque $n \to \infty$.

Ainsi, la suite $\{u_n\}$ converge vers $\ell = u_0 + \dfrac{u_1 - u_0}{1 - r}$

d'où $$\boxed{\ell = \frac{u_1 + (1 - a)\, u_0}{2 - a}}$$

■

2.21. Soit $\{u_n\}$ la suite définie par :

$$u_1 = 1 \qquad u_{n+1} = \sqrt{u_n^2 + \frac{1}{2^n}}$$

Montrer qu'elle est de Cauchy.

Solution

Pour tout n $u_n \geq 1$. En effet $u_0 \geq 1$

Supposons $u_n \geq 1$. ALors $u_{n+1} = \sqrt{u_n^2 + 1/2^n} \geq 1$.

$$u_{n+1} - u_n = \sqrt{u_n^2 + 1/2^n} - u_n .$$ Multiplions par la partie conjuguée

$$= \frac{1/2^n}{\sqrt{u_n^2 + 1/2^n} + u_n} \leq \frac{1}{2^{n+1}}$$

Soient m et n deux entiers tels que $m > n$.

$u_m - u_n = u_m - u_{m-1} + u_{m-1} - u_{m-2} + \ldots + u_{n+1} - u_n$.

$|u_m - u_n| \leq |u_m - u_{m-1}| + |u_{m-1} - u_{m-2}| + \ldots + |u_{n+1} - u_n|$

$$|u_m - u_n| \leq \frac{1}{2^m} + \frac{1}{2^{m-1}} + \ldots + \frac{1}{2^{n+1}}$$

$$|u_m - u_n| \leq \frac{1}{2^{n+1}}\left[\frac{1}{2^{m-n-1}} + \ldots + \frac{1}{2} + 1\right]$$

$$|u_m - u_n| \leq \frac{1}{2^{n+1}} \frac{1 - \frac{1}{2^{m-n}}}{1 - 1/2} < \frac{1}{2^{n+1}} \cdot \frac{1}{1/2}$$

Finalement $|u_m - u_n| < 1/2^n$

La suite $\{1/2^n\}$ converge vers 0 donc

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \quad / \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (n > N \Rightarrow 1/2^n < \varepsilon)$

Ainsi $\forall m, n \in \mathbb{N} \quad [m > n > N \Rightarrow |u_m - u_n| < \varepsilon]$ ■

2.22. Montrer que la suite $\{s_n\}$, $n \in \mathbb{N}^*$, définie par :

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

est divergente.

Solution

Il suffit de montrer que la suite $\{s_n\}$ n'est pas de Cauchy.

$$|s_{2n} - s_n| = \left(\sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k}\right) - \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right)$$

$$= \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}$$

$$\text{Or} \quad \forall k \in \{1, 2, \ldots, n\}, \quad \frac{1}{2n} < \frac{1}{n+k} < \frac{1}{n+1}$$

Mais alors, en faisant varier k et en prenant la somme des n inégalités, il s'en suit que : $|s_{2n} - s_n| > n \cdot 1/2n = 1/2$

Ainsi $\exists \varepsilon_0 = 1/2 > 0 \ \forall N \in \mathbb{N}^* \ \exists m \in \mathbb{N}^* \ (m = 2N) \ \exists n \in \mathbb{N}^* \ (n = N)$

tels que: $m \geq N$ et $n \geq N$ et $|s_m - s_n| > \varepsilon_0$.

Donc la suite $\{s_n\}$ n'est pas de Cauchy. Elle ne peut alors converger. ■

2.23.

Etudier la fonction $f(x) = (x^2 + a^2)/2x$, $a > 0$.

En déduire la convergence de la suite $\{u_n\}$ définie par la donnée de $u_0 \in \mathbb{R}^*$ et la relation de récurrence $U_{n+1} = \frac{1}{2}\left(U_n + \frac{a^2}{U_n}\right)$

Solution

$$f(x) = (x^2 + a^2)/2x = \frac{1}{2}\left(x + \frac{a^2}{x}\right)$$

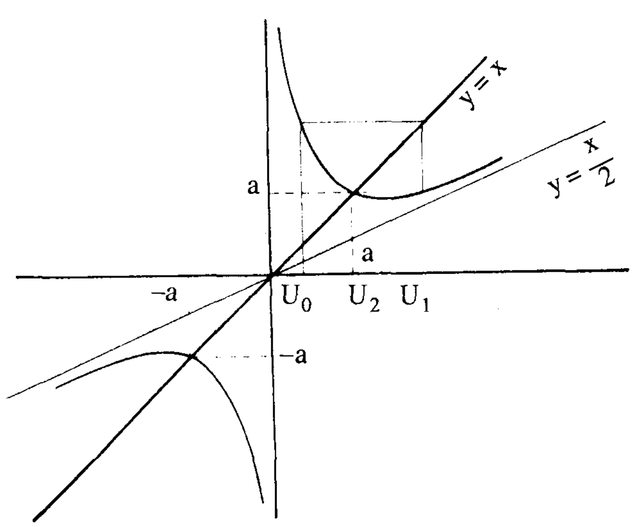
Etude de f : f est définie sur $\mathbb{R}^*$. C'est une fonction impaire. On va l'étudier sur $\mathbb{R}^*_+$

$$f'(x) = \frac{1}{2}\left[1 - \frac{a^2}{x^2}\right] = \frac{(x-a)(x+a)}{2x^2}$$

x	0		a		$+\infty$
$f'(x)$	‖	-	0	+	
$f(x)$	‖ $+\infty$	↘	a	↗	$+\infty$

Par ailleurs, $f(x) - \frac{x}{2} = \frac{a^2}{2x}$ donc $\lim_{x \to +\infty} [f(x) - x/2] = 0$

Ainsi la droite d'équation $y = x/2$ est asymptote à la courbe de f au voisinage de l'infini.



Etude de la suite $\{u_n\}$

Cette suite est définie par : $u_{n+1} = f(u_n)$.

Puisque f est continue, les limites possibles sont solutions de l'équation $f(\ell) = \ell$.

on obtient $\ell = \pm a$.

1er cas $u_0 > 0$

Si $u_0 = a$ par une recurrence simple on montre que $u_n = a$ pour tout n.

Si $u_0 > a$ posons $D =]a, +\infty[$

$f(D) \subset D$. Ainsi $u_1 \in D$, $u_2 \in D$ ... $u_n \in D$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

$\{u_n\}$ est alors minorée par a .

$$u_1 - u_0 = \frac{(a - u_0)(a + u_0)}{2u_0} < 0$$

Ainsi $u_1 < u_0$ et puisque f strictement croissante sur D, on a $u_2 < u_0$.

Plus généralement $u_{n+1} < u_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

La suite $\{u_n\}$ étant décroissante et minorée par a, elle converge vers une limite $\ell \geq a$.

On en déduit que $\ell = a$

Si $0 < u_0 < a$.

$f(]0, a[) \subset D$. Donc $u_1 \in D$ et $u_n \in D$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$

On retrouve le cas précédent (voir figure)

Ainsi, pour $n \geq 1$ la suite $\{u_n\}$ est décroissante minorée par a et converge vers a.

2ème cas : $u_0 < 0$

Considérons la suite de terme général $v_n = - u_n$.

$v_{n+1} = - u_{n+1} = - f(u_n) = f(- u_n) = f(v_n)$.

Ainsi la suite $\{v_n\}$ est telle que $v_0 > 0$ et $v_{n+1} = f(v_n)$, on déduit du 1er cas que $\{v_n\}$ converge vers a.

Il en résulte que $\{u_n\}$ converge vers - a. ■

2.24. Etudier suivant les valeurs de a et de b, $a \geq 0$ et $b > 0$.
la nature de la suite numérique définie par :

$$u_0 = a, \quad u_{n+1} = \sqrt{u_n + b} \quad \text{pour } n \in \mathbb{N}.$$

Solution

Posons $f(x) = \sqrt{x + b}$ $D_f = [-b, +\infty[$.

Prenons $D = \mathbb{R}+$ on a $f : D \to D$ et $u_0 \in D$.

Ainsi $\{u_n\}$ est bien définie et $u_n \geq 0$ pour tout n.

- Cherchons les limites ℓ possibles. Puisque f est continue, ℓ doit vérifier $f(\ell) = \ell$:

$$\sqrt{\ell + b} = \ell \quad \Leftrightarrow \ell + b = \ell^2 \quad \text{et } \ell \geq 0$$

$\ell^2 - \ell - b = 0$ $\Delta = 1 + 4b$

$\Delta \geq 0$ on a donc deux racines $\ell_1 = \dfrac{1 - \sqrt{1+4b}}{2}$, $\ell_2 = \dfrac{1 + \sqrt{1+4b}}{2}$

mais puisque $\ell \geq 0$, on a une seule limite possible $\ell = \ell_2$.

- Variation de f : $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x+b}}$ $\quad \forall\, x > -b$

Ainsi f est strictement croissante sur D.

- Comparaison de u_0 et u_1 : $u_0 < u_1 \iff a \leq \sqrt{a+b}$

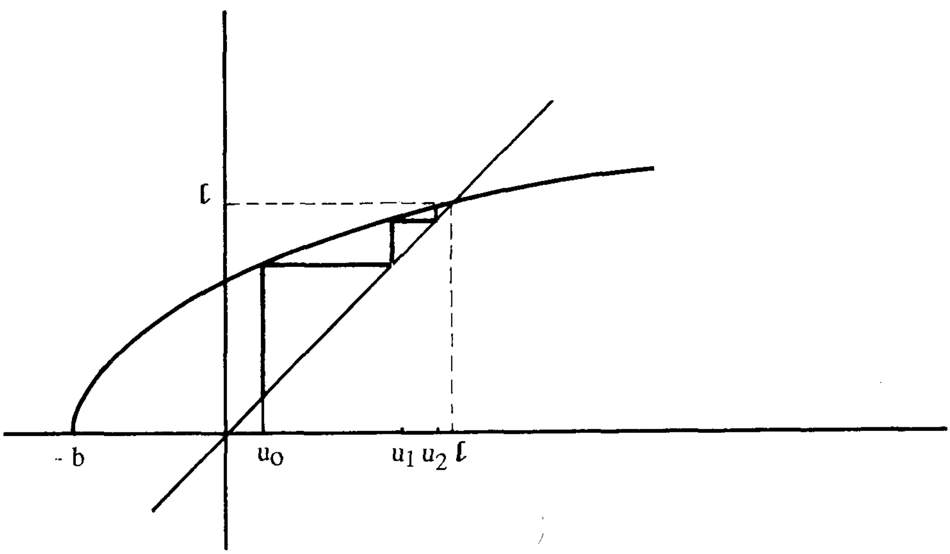
$\iff a^2 \leq a + b \iff a^2 - a - b < 0$

$\iff a \in \,]\ell_1, \ell_2[\, \iff a \in [0, \ell[$ puisque $\ell_1 < 0$, $a \geq 0$ et $\ell = \ell_2$.

1er cas : Si $a \in [0, \ell[$ alors $u_0 < u_1$ donc $\{u_n\}$ est croissante

$a < \ell \Rightarrow u_0 < \ell \Rightarrow u_n \leq \ell$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

La suite $\{u_n\}$ est alors convergente et admet $\ell = \ell_2$ pour limite



2ème cas : Si $a = \ell$, $u_0 = \ell$, ceci entraîne que $u_n = \ell$ pour tout n.

3ème cas : Si $a > \ell$, alors $u_0 > u_1$. La suite $\{u_n\}$ est alors décroissante. Elle est minorée par ℓ puisque $u_0 > \ell$, elle converge donc vers $\ell = \ell_2$. ∎

2.25. Soit a un réel strictement positif. Etudier la convergence et déterminer la limite éventuelle de la suite de terme général :

$$u_n = a + \sqrt{a + \sqrt{a + \sqrt{a + \ldots + \sqrt{a}}}} \quad \text{(a figure n fois dans l'expression)}$$

Solution

<u>1ère méthode</u> :

On peut définir la suite $\{u_n\}$ de la manière suivante $u_1 = a$ et $u_{n+1} = a + \sqrt{u_n}$, $n \in \mathbb{N}^*$

Posons $f(x) = a + \sqrt{x}$ et $D = \mathbb{R}+$

$f(D) \subset D$ et $u_1 \in D$. f est croissante sur D.

Cherchons les points fixes de f :

$$a + \sqrt{x} = x \Leftrightarrow \sqrt{x} = x - a$$
$$\Leftrightarrow \quad x = x^2 - 2ax + a^2 \quad \text{et} \quad x \geq a.$$

L'équation du 2ème degré admet les racines

$$x_1 = \frac{2a + 1 - \sqrt{4a + 1}}{2} \qquad x_2 = \frac{2a + 1 + \sqrt{4a + 1}}{2}$$

On peut vérifier que $x_1 < a < x_2$

Ainsi x_2 est l'unique point fixe de f et l'unique limite possible de $\{u_n\}$.

On peut montrer par ailleurs que pour tout x positif :

$(f(x) > x \Leftrightarrow x \in [0, x_2[)$ et $(f(x) < x \Leftrightarrow x > x_2)$.

1er cas : $a < x_2$ ainsi $u_1 < x_2$ puisque f est croissante sur D.

$u_2 < x_2$ et plus généralement $u_n < x_2$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

Par ailleurs $u_1 < x_2$ entraîne que $f(u_1) > u_1$.

Ainsi $u_2 > u_1$ et plus généralement, par applications successives de f on a :

$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad u_{n+1} > u_n$

Ainsi $\{u_n\}$ est croissante et majorée. Elle converge donc vers x_2.

2ème cas $u_1 > x_2$: On montre de même que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $u_n > x_2$ et $u_{n+1} < u_n$.

Ainsi la suite $\{u_n\}$ est décroissante et minorée, donc converge vers x_2

3ème cas $u_1 = x_2$. On a évidemment

$\forall n \in \mathbb{N}^*$ $u_n = x_2$, la suite est constante et égale à x_2.

<u>2ème méthode</u> :

$u_{n+1} = a + \sqrt{u_n}$

Posons $v_n = u_n - a$

on a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ $\quad v_{n+1} = \sqrt{v_n + a}$

On déduit de l'exercice 2.24 que $\{v_n\}$ converge vers $\ell'_2 = \dfrac{1 + \sqrt{4a + 1}}{2}$

Et donc $\{u_n\}$ converge vers $\ell_2 = a + \ell'_2 = \dfrac{2a + 1 + \sqrt{4a + 1}}{2}$ ∎

2.26. **Suites homographiques se ramenant à une suite géométrique.**
Soient a, b, c, d, des réels que $ad - bc \neq 0$ et $c \neq 0$.

posons $f(x) = \dfrac{ax + b}{cx + d}$

On suppose que $(d - a)^2 + 4bc > 0$.

1°) Montrer que f admet deux points fixes α et β.

Etablir l'existence d'une constante k telle que :

$$\forall\ z \neq \beta \qquad \frac{f(z) - \alpha}{f(z) - \beta} = k\,\frac{z - \alpha}{az - \beta}$$

2°) Etudier la suite $\{u_n\}$ définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ et

$$u_{n+1} = \frac{au_n + b}{cu_n + d} \quad n \in \mathbb{N}.$$

On suppose que : $\forall\ n \in \mathbb{N}\quad u_n \neq -d/c$ (u_n est défini pour tout n)

3°) Pour quelle valeurs de u_0 la suite $\{u_n\}$ est-elle définie pour tout n ?

Solution

1°) Soit $x \neq -d/c$, x est un point fixe de f si $f(x) = x$, ce qui équivaut à :

$$cx^2 + (d - a)x - b = 0.$$

$\Delta = (d - a)^2 + 4bc$. Or $\Delta > 0$, ainsi cette équation va admettre deux racines réelles distinctes α et β qui vont être les points fixes de f. α et β vérifient les relations $\quad c\alpha^2 + (\alpha - a)\,\alpha - b = 0 \quad$ et $\quad c\beta^2 + (\alpha - a)\,\beta - b = 0. \qquad (1)$

$$\frac{f(x) - \alpha}{f(x) - \beta} = \frac{ax + b - \alpha cx - d\alpha}{ax + b - \beta cx - d\beta}$$

En utilisant (1), on peut écrire :

$$\frac{f(x) - \alpha}{f(x) - \beta} = \frac{ax - \alpha cx + c\alpha^2 - a\alpha}{ax - \beta cx + c\beta^2 - a\beta}$$

$$= \frac{a - c\alpha}{a - c\beta}\cdot\frac{x - \alpha}{x - \beta}$$

Il suffit donc de prendre $\quad k = \dfrac{a - c\alpha}{a - c\beta}$

2°) $\forall\ n \in \mathbb{N} \qquad u_{n+1} = f(u_n) \qquad (2)$

Si $u_0 = \alpha$ ou $u_0 = \beta$ la suite $\{u_n\}$ est constante, sinon pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $\qquad u_n \neq \alpha \quad$ et $\quad u_n \neq \beta$.

Considérons la suite de terme général $v_n = \dfrac{u_n - \alpha}{u_n - \beta}$

$$v_{n+1} = \frac{f(u_n) - \alpha}{f(u_n) - \beta} = k\,\frac{u_n - \alpha}{u_n - \beta}$$

Ainsi $\{v_n\}$ est une suite géométrique de raison k.

$v_n = k^n . v_0$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$u_n = \frac{\beta v_n - \alpha}{v_n - 1}$$

$$u_n = \frac{\beta k^n v_0 - \alpha}{kv_0 - 1} \quad \text{on a aussi} \quad u_n = \frac{\beta v_0 - \alpha/k^n}{v_0 - 1/k^n}$$

1er cas si $|k| < 1$ alors $k^n \to 0$ et $u_n \to \alpha$

2ème cas si $|k| > 1$ alors $1/k^n \to 0$ et $u_n \to \beta$

3ème cas si $k = -1$ $u_n = \beta + \dfrac{\beta - \alpha}{(-1)^n v_0 - 1}$, $\{u_n\}$ est alors divergente.

on ne peut avoir $k = 1$ car $c \neq 0$.

3°) Supposons que la suite ne soit définie que jusqu'à l'ordre n.

C'est à dire $u_i \neq - d/c$ pour $i = 0, ..., n-1$ mais $u_n = - d/c$.

Le calcul fait en 2) est valable jusqu'à l'ordre n.

On a en particulier : $u_n = \dfrac{\beta k^n v_0 - \alpha}{k^n v_0 - 1}$ avec $v_0 = \dfrac{u_0 - \alpha}{u_0 - \beta}$

$u_n = - d/c$ entraîne que $u_0 = w_n$ où $w_n = \dfrac{d(\beta - \alpha k^n) + c\alpha\beta\,(1 - k^n)}{c\,(\alpha - \beta k^n) + d\,(1 - k^n)}$

Pour que la suite $\{u_n\}$ soit définie pour tout n, il faut et il suffit que $u_0 \neq w_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

En particulier u_1 est définie si $u_0 \neq w_0$, $w_0 = - d/c$. ■

2.27. **Suites réccurentes homographiques se ramenant à une suite arithmétique.**

Soient a, b, c, d, des réels tels que $ad - bc \neq 0$ et $c \neq 0$.

posons $f(x) = \dfrac{ax + b}{cx + d}$

on suppose $(d - a)^2 + 4\,bc = 0$.

1°) montrer que f admet un unique point fixe α et qu'il existe une constante k telle que : $\forall\, x \neq 0 \quad \dfrac{1}{f(x) - \alpha} = \dfrac{1}{x - \alpha} + k.$

2°) Etudier la suite $\{u_n\}$ définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ et $u_{n+1} = \dfrac{au_n + b}{cu_n + d}$ (on suppose que $u_n = -d/c$ pour tout n).

3°) A quelle condition sur u_0 la suite est - elle définie pour tout n ?

Solution

1°) Comme pour l'exercice précédent x est un point fixe de f si $cx^2 + (d - a)x - b = 0$
Or $\Delta = (d - a)^2 + 4bc$ est supposé nul

donc f admet un unique point fixe
En utilisant les relations $b - \alpha d = \alpha = \frac{a - d}{2c}$ et $d = -2\alpha c + a$, on déduit :

$$\frac{1}{f(x) - \alpha} = \frac{cx + d}{ax + b - \alpha cx - d\alpha} = \frac{cx - \alpha c + a - \alpha c}{(x - \alpha)(a - \alpha c)}$$

$$= \frac{1}{x - \alpha} + \frac{c}{a - \alpha c}$$

on prend $k = \frac{c}{a - \alpha c}$

2°) Si $u_0 = \alpha$ la suite est constante. Sinon, la suite n'est pas stationnaire et $u_n \neq \alpha$ pour tout n. Posons $v_n = \frac{1}{u_n - \alpha}$

$$v_{n+1} = \frac{1}{f(u_n) - \alpha} = \frac{1}{u_n - \alpha} + k$$

La suite $\{v_n\}$ est donc arithmétique de raison k.

$v_n = v_0 + nk$.

$u_n = \alpha + 1/v_n$

$= \alpha + \frac{1}{v_0 + nk}$

puisque $k \neq 0$ car $c \neq 0$, la suite $\{u_n\}$ converge vers α.

3°) Si la suite u_n est définie jusqu'à l'ordre n seulement .
C'est à dire $u_i \neq -d/c$ pour $i = 0,1, n-1$ et $u_n = - d/c$.
On déduit du calcul précédent que $u_n = \alpha + \frac{1}{v_0 + nk}$

Ainsi $u_0 = \frac{u_n - nk\alpha (u_n - \alpha)}{1 - nk (u_n - \alpha)}$

Si $u_n = - d/c$ alors $u_0 = \frac{n (a - d) - 2d}{2c (1 + n)}$
Pour que la suite soit définie pour tout n il faut et il suffit que pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$u_0 \neq \frac{n (a - d) - 2d}{2c (1 + n)}$$ ■

2.28. Etudier la convergence de la suite $\{u_n\}$ définie par :

a) $u_0 = 0$ $\qquad u_{n+1} = \frac{-1}{1 + u_n}$

b) $u_0 = 1$ $\qquad u_{n+1} = \frac{3u_n + 1}{u_n + 1}$

Solution

a) Cherchons les solutions de l'équation :

$$\ell = \frac{3\ell + 1}{\ell + 1} \quad \Leftrightarrow$$

$\ell^2 - 2\ell - 1 = 0$ et $\ell \neq -1 \Leftrightarrow \ell = 1 \pm \sqrt{2}$

posons $\alpha = 1 - \sqrt{2}$ $\beta = 1 + \sqrt{2}$

posons $v_n = \dfrac{u_n - \alpha}{u_n - \beta}$

on peut vérifier que $\{v_n\}$ est une suite géométrique de raison

$$k = \frac{3 - \alpha}{3 - \beta} = \frac{2 + \sqrt{2}}{2 - \sqrt{2}}, \quad |k| > 1$$

$$v_n = k^n v_0 \quad \text{et} \quad u_n = \frac{\beta v_n - \alpha}{v_n - 1}$$

$$u_n = \frac{\beta v_0 - \alpha/k^n}{v_0 - 1/k^n}$$. Et puisque $|k| > 1$

$u_n \to \beta$ quand $n \to +\infty$. Ainsi $\{u_n\}$ converge vers $1 + \sqrt{2}$

b) cherchons les solutions de $f(\ell) = \ell$ avec $f(x) = \dfrac{-1}{1 + x}$

$$f(\ell) = \ell \Leftrightarrow \ell = \frac{-1}{\ell + 1}$$

$$\Leftrightarrow \ell^2 + \ell + 1 = 0$$

$\Delta = -3$ ainsi cette équation n'admet pas de racine réelle.

Par conséquent $\{u_n\}$ ne peut converger vers une limite réelle. Elle est divergente. ■

2.29. Soit $\{u_n\}$ la suite définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ et $u_{n+1} = \dfrac{2u_n + 4}{-u_n + 6}$.

a) Pour quelle valeur de u_0 la suite est-elle définie seulement jusqu'à l'ordre 100?

b) Déterminer u_0 pour que la suite soit définie pour tout n.

Solution

a) On doit determiner u_0 telle que : $\forall n = 0,1,..,99$ $u_n \neq 6$ et $u_{100} = 6$

La fonction $f(x) = \dfrac{2x + 4}{-x + 6}$ admet un unique point fixe $x = 2$, $f(x) = x$.

$$\forall x \neq 2 \qquad \frac{1}{f(x) - 2} = \frac{-x + 6}{4x - 8} = \frac{1}{x - 2} - \frac{1}{4}$$

Posons pour $n \leq 100$ $v_n = \dfrac{1}{u_n - 2}$

Pour $n < 100$ $v_{n+1} = \dfrac{1}{f(u_n) - 2} = \dfrac{1}{u_n - 2} - \dfrac{1}{4} = v_n - \dfrac{1}{4}$

Par conséquent $v_n = v_0 - n/4$ avec $v_0 = \dfrac{1}{u_0 - 2}$

$$u_o = \frac{4}{4\,v_n + n} + 2$$

or $v_n = \dfrac{1}{u_n - 2}$ ainsi $u_0 = \dfrac{u_n\,(4 + 2n) - 4n}{n\,(u_n - 2) + 4}$

Finalement , $u_n = 6$ si et seulement si $u_0 = \dfrac{6 + 2n}{n + 1}$

ainsi la suite est définie jusqu'à l'ordre n = 100 si et seulement si

$$u_0 = \frac{6 + 2\,.100}{100 + 1} = \frac{206}{101}$$

b - La suite est définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ si $u_0 \neq \dfrac{6 + 2n}{n + 1}$ pour tout n.

2.30.

Soit p un entier naturel non nul, on pose :

$$u_0 = p \text{ et } u_{n+1} = p + 1/u_n \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

1°) a) Montrer que u_n est bien définie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

b) Montrer que $u_n \in \mathbb{Q}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

c) Calculer u_0 , u_1 , u_2 et u_3.

2°) Soient $v_n = u_{2n}$ et $w_n = u_{2n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

a) Vérifier que :

$$v_{n+1} = \frac{(P^2 + 1)\,v_n + P}{P\,v_n + 1} \quad \text{et} \quad w_{n+1} = \frac{(P^2 + 1)\,w_n + P}{p\,w_n + 1}$$

b) Montrer que les deux suites $\{v_n\}$ et $\{w_n\}$ sont convergentes .

(on remarquera que ces deux suites sont écrites à l'aide d'une relation de récurrence définie par une même fonction f).

3°) En déduire que la suite $\{u_n\}$ est convergente, et calculer sa limite ℓ.

4°) Que peut-on remarquer, quant à la nature des termes u_n et de la limte ℓ ?.

Solution

Soit $p \in \mathbb{N}^*$. on pose $u_0 = p$

$$u_{n+1} = p + 1/u_n \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}$$

1°) a - Montrons par récurrence que u_n est bien défini et que $u_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

pour $n = 0$, $u_0 = p > 0$.

Supposons que $u_n > 0$. d'où $1/u_n > 0$ et $p > 0$.

Donc $u_{n+1} > 0$.

b) Montrons que $\forall n \in \mathbb{N}$ $\quad u_n \in \mathbb{Q}$

Par récurrence : $u_0 = p \in \mathbb{N}$ donc $u_0 \in \mathbb{Q}$.

Supposons que $u_n \in \mathbb{Q}$ (donc $u_n \in \mathbb{Q}^*+$)

d'où $\exists (a, b) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ / $u_n = a/b$

d'où

$$u_{n+1} = p + 1/u_n = p + b/a = \frac{ap + b}{a}$$

comme p, a, b $\in \mathbb{N}^*$ donc $u_{n+1} \in \mathbb{Q}^*+$

c) $u_0 = p$, $u_1 = \dfrac{p^2 + 1}{p}$, $u_2 = p + \dfrac{p}{p^2 + 1}$ et $u_3 = p + \dfrac{p^2 + 1}{p(p^2 + 2)}$

2°) $\forall n \in \mathbb{N}$ $\quad v_n = u_{2n}$ $\quad$ et $\quad w_n = u_{2n+1}$

a)
$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{2(n+1)} = u_{2n+2} \\ &= p + 1/u_{2n+1} \\ &= p + \cfrac{1}{p + \cfrac{1}{u_{2n}}} = \frac{(p^2 + 1)\, u_{2n} + p}{p\, u_{2n} + 1} = \frac{(p^2 + 1)\, v_n + p}{pv_n + 1} \end{aligned}$$

D'où le résultat.

On utilise un procédé identique pour w_n.

b - Montrons que les deux suites $\{v_n\}$ et $\{w_n\}$ sont convergentes :

Considérons la fonction définie par : $f(x) = \dfrac{(p^2 + 1)x + p}{px + 1}$.

On va l'étudier sur $D = \mathbb{R}^*+$.

$\forall n \in \mathbb{N}$ $\quad v_{n+1} = f(v_n)$

et $\quad w_{n+1} = f(w_n)$.

Etudions la monotonie de la fonction f. Pour cela, calculons sa dérivée :

$$f'(x) = \frac{(p^2+ 1) . [px + 1] - p . [(p^2 + 1) x + p]}{(px + 1)^2} . = \frac{1}{(px + 1)^2} > 0$$

Donc f est strictement croissante sur D. Par ailleurs, $f(D) \subset D$ et v_0 , $w_0 \in D$, on en déduit que les deux suites $\{v_n\}$ et $\{w_n\}$ sont monotones et leur sens de variation dépend des deux premiers termes de chaque suite.

i) $f(v_0) - v_0 = v_1 - v_0 = u_2 - u_0 = \dfrac{p}{p^2 + 1} > 0.$ donc la suite $\{v_n\}$ est croissante.

ii) $f(w_0) - w_0 = w_1 - w_0 = u_3 - u_1 = \dfrac{-1}{P (P^2 + 2)} < 0$ donc la suite $\{w_n\}$ est décroissante.

Par ailleurs, la fonction f (restreinte au domaine $D = \mathbb{R}^*+$) est strictement croissante et on a le tableau de variations et les limtes suivantes :

x	0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	p	$\nearrow$	$\left(\dfrac{p^2+1}{p}\right)$

Ainsi, $f(D) \subset \left[p, \dfrac{p^2+1}{p}\right] \subset D.$

Donc f est bornée sur D, et par conséquent : $\forall\, n \in \mathbb{N}\ \ v_n, w_n \in \left[p, \dfrac{p^2+1}{p}\right]$

La suite $\{v_n\}$ est croissante majorée par $\dfrac{p^2+1}{p}$, et la suite $\{w_n\}$ est décroissante minorée par p. Ainsi, $\{v_n\}$ et $\{w_n\}$ sont convergentes.

3°) Les deux suites $\{v_n\}$ et $\{w_n\}$ sont convergentes et leurs limites doivent être nécessairement solution de l'équation $[\, f(x) = x \,]$ c'est à dire :

$$\frac{(p^2+1)\,x+p}{px+1} = x$$

d'où $$(p^2+1)x + p = px^2 + x.$$
ce qui donne : $px^2 - p^2x - p = 0$
En simplfiant par $p \neq 0$, il s'en suit : $x^2 - px - 1 = 0$
Le discriminant $\Delta = p^2 + 4 > 0$, et cette équation admet donc deux solutions réelles

$$r_1 = \frac{p - \sqrt{p^2+4}}{2} \quad \text{et} \quad r_2 = \frac{p + \sqrt{p^2+4}}{2}$$

Comme les deux suites $\{v_n\}$ et $\{w_n\}$ sont positives on a :
$\lim\limits_{n\to\infty} v_n = \lim\limits_{n\to\infty} w_n = r_2$

ou encore : $\lim\limits_{n\to\infty} u_{2n} = \lim\limits_{n\to+\infty} u_{2n+1} = \dfrac{p+\sqrt{p^2+4}}{2}$

Les deux sous-suites $\{u_{2n}\}$ et $\{u_{2n+1}\}$ sont convergentes et tendent vers la <u>même</u> limite, donc la suite $\{u_n\}$ est convergente et tend également vers cette limite.

Soit $\ell = \dfrac{p+\sqrt{p^2+4}}{2}$

4°) On peut vérifier que pour tout $p \in \mathbb{N}^*$ on a : $\ell \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$. Ainsi, la suite des nombres rationnels u_n admet pour limite un nombre irrationnel.

Exemple : pour $p = 1$. $\quad \ell_1 = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$.

ℓ_1 est appelé le <u>nombre d'Or</u> $\approx 1{,}618$ "correspondant à une proportion considérée comme particulièrement esthétique ". (Larousse) ■

FONCTIONS NUMERIQUES DE LA VARIABLE REELLE

.1 Déterminer le domaine de définition des fonctions suivantes :

1°) $f(x) = \sqrt{-x} + \dfrac{1}{\sqrt{1-x}}$ 2°) $f(x) = \sqrt{\operatorname{tg} x}$ 3°) $f(x) = \sqrt{\cos 2x}$

4°) $f(x) = \operatorname{Log} \dfrac{1+x}{3-x}$ 5°) $f(x) = \operatorname{Arcsin}(1 - x^2)$.

Solution

Désignons par D_f le domaine de définition de la fonction f.

(on rappelle que D_f est l'ensemble des nombres réels x tels que f (x) existe).

1°) $f(x) = \sqrt{-x} + \dfrac{1}{\sqrt{1-x}}$

$x \in D_f \iff [-x \geq 0$ et $1 - x > 0]$ d'où $D_f =]-\infty, 0]$.

2°) $f(x) = \sqrt{\operatorname{tg} x}$

$x \in D_f \iff \operatorname{tg} x \geq 0 \iff \exists\, k \in \mathbb{Z}$ tel que : $x \in I_k = [k\pi, k\pi + \pi/2[$.

d'où $D_f = \bigcup\limits_{k \in \mathbb{Z}} I_k$.

3°) $f(x) = \sqrt{\cos 2x}$ $D_f = \bigcup\limits_{k \in \mathbb{Z}} [-\pi/4 + k\pi, \pi/4 + k\pi]$.

4°) $f(x) = \operatorname{Log} \dfrac{1+x}{3-x}$ La fonction Log étant définie sur $]0, +\infty[$:

$$x \in D_f \iff x \neq 3 \text{ et } \frac{1+x}{3-x} > 0 \iff (1+x)(3-x) > 0.$$

d'où $D_f =]-1, 3[$.

5°) $f(x) = \operatorname{Arcsin}(1 - x^2)$. La fonction Arcsin étant définie sur $[-1, 1]$

$x \in D_f \iff -1 \leq 1 - x^2 \leq 1$. Donc $D_f = [-\sqrt{2}; \sqrt{2}]$ ■

3.2 Déterminer le domaine de définition des fonctions suivantes

1°) $f(x) = \operatorname{th} \dfrac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$ 2°) $f(x) = \operatorname{Arc tg} \sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}$

3°) $f(x) = \operatorname{Arg ch}(3x + 2)$ 4°) $f(x) = \operatorname{Arg th} \dfrac{2x}{(1 - x^2)}$

Solution

1°) La fonction th est définie sur $\mathbb{R}$, donc f (x) existe si $\dfrac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$ est défini, ce qui est vérifié pour tout $x \in \mathbb{R}$

Donc $D_f = \mathbb{R}$

2°) La fonction Arctg est définie sur $\mathbb{R}$.

Or $\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}$ n'appartient à $\mathbb{R}$ que si $x \neq -1$

et $(x-1)(x+1) \geq 0$. c'est-à-dire que $x \in]-\infty, -1[\cup [1, +\infty[$

d'où $D_f =]-\infty, -1[\cup [1, +\infty[$.

3°) On sait que la fonction Argch est définie sur $[1, +\infty[$, donc f (x) existe si $3x + 2 \geq 1$ donc $D_f = [-1/3 ; +\infty[$.

4°) La fonction Argth est définie sur $]-1,1[$ donc f est définie si : $\dfrac{2x}{(1-x)^2} \in]-1, 1[$ et $x \neq 1$.

donc f (x) existe si et seulement si :

$$\begin{cases} x \neq 1 \\ 2x < (1-x)^2 \\ -(1-x)^2 < 2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 1 \\ x^2 - 4x + 1 > 0 \\ x^2 + 1 > 0 \end{cases}$$

D'où $D_f =]-\infty, 2-\sqrt{3}[\cup]2+\sqrt{3}; +\infty[$ ■

3.3 Etudier la limite en x_0 de la fonction f définie par :

1°) $f(x) = \dfrac{\text{tg } 2x}{x}$, $x_0 = 0$ 2°) $f(x) = \dfrac{\sin 3x}{\text{tg } \pi x}$, $x_0 = 0$

3°) $f(x) = \dfrac{1-\sin x}{(\pi/2 - x)^2}$, $x_0 = \dfrac{\pi}{2}$ 4°) $f(x) = x^2(1-\cos 1/x)$, $x_0 = -\infty$

Solution

1°) On sait que $\text{tg } 2x \underset{0}{\sim} 2x$ puisque $\lim\limits_{u \to 0} \text{tg}u/u = 1$.

donc $f(x) \underset{0}{\sim} 2x/x$

et par suite : $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 2$

2°) On sait que $\sin x \underset{0}{\sim} x$ et $\text{tg } x \underset{0}{\sim} x$ donc :

$$\frac{\sin 3x}{\text{tg } \pi x} \underset{0}{\sim} \frac{3x}{\pi x} \quad \text{et par suite} \quad \lim_{x \to 0} f(x) = 3/\pi$$

3°) Posons $\pi/2 - x = t$. Alors $f(x) = \dfrac{1-\cos t}{t^2}$

Or $1 - \cos t \underset{0}{\sim} t^2/2$.

D'où $\lim\limits_{x \to \pi/2} f(x) = \lim\limits_{t \to 0} \dfrac{t^2/2}{t^2} = \dfrac{1}{2}$

4°) Lorsque x tend vers $-\infty$, $t = 1/x$ tend vers 0-.

On peut écrire : $f(x) = \dfrac{1-\cos(1/x)}{1/x^2} = \dfrac{1-\cos t}{t^2}$.

et d'après la question 3°) : $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{t \to 0} \dfrac{1 - \cos t}{t^2} = \dfrac{1}{2}$ ■

3.4 Etudier la limite de la fonction f au point $x_0 = 0$, dans les cas suivants :

1°) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2 + a^2} - a}{\sqrt{x^2 + b^2} - b}$ 2°) $f(x) = \dfrac{\sin x}{\sqrt{1 - \cos x}}$

Solution

1°) En calculant directement la limite de f on constate que $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \dfrac{|a| - a}{|b| - b}$

Plusieurs cas se présentent alors :

1er cas : Si $b < 0$.

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad a \geq 0 \\ a/b & \text{si} \quad a < 0 \end{cases}$$

2ème cas : *Si* $b > 0$ et $a < 0$.

$\lim\limits_{x \to 0} f(x) = +\infty$

3ème cas : Si $b > 0$, $a > 0$.On a alors une forme indéteminée pour lever l'indétermination, on multiplie et on divise par l'expression conjuguée du numérateur et du dénominateur, il vient :

$$f(x) = \frac{\sqrt{x^2 + b^2} + b}{\sqrt{x^2 + a^2} + a}$$

et donc $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = b/a$

4ème cas : Si $a = 0$ et $b = 0$ on a $f(x) = 1$.

2°) On a $1 - \cos x = 2 \sin^2 x/2$ et $\sin x = 2 \sin x/2 . \cos x/2$.

donc $f(x) = \sqrt{2} . \dfrac{\sin x/2 \cos x/2}{|\sin x/2|}$ et alors $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \sqrt{2}$ et $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = -\sqrt{2}$

■

3.5 Etudier la continuité de la fonction f sur $\mathbb{R}$

1°) $f(x) = \dfrac{x - 1}{x(x + 1)(x^2 - 4)}$ 2°) $f(x) = \operatorname{tg} \dfrac{1}{x}$

Solution

1°) $f(x) = \dfrac{x - 1}{x(x + 1)(x^2 - 4)}$ f est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{0 , -1 , -2 , 2\}$

Comme f est une fraction rationnelle, donc elle est continue sur son domaine de définition.

De plus : $\lim_{x \to 0} f(x)$, $\lim_{x \to -2} f(x)$, $\lim_{x \to -1} f(x)$ et $\lim_{x \to 2} f(x)$

sont infinies et par conséquent f ne peut être prolongée par continuité en ces points.

2°) $f(x) = \operatorname{tg} 1/x$ f est définie sur $\mathbb{R} - \{0 ; 2/(k+1)\pi$ où $k \in \mathbb{Z}\}$

elle est continue sur son domaine de définition comme composée de fonctions continues.

Etudions la continuité au point 0.

Soient deux suites $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telles que :

$$x_n = \frac{1}{2n\pi} \quad \text{et} \quad y_n = \frac{3}{(6n+1)\pi}$$

on a $\lim_{n \to +\infty} x_n = 0$ et $\lim_{n \to +\infty} y_n = 0$

Mais $f(x_n) = \operatorname{tg}(2n\pi) = 0$ et $f(y_n) = \sqrt{3}$

donc $\lim_{n \to +\infty} f(x_n) = 0$ et $\lim_{n \to +\infty} f(y_n) = \sqrt{3}$

et par conséquent f n'admet pas de limite en 0 et ne peut être prolongée par continuité en ce point. De même, on ne peut la prolonger aux points $Z_k = 2/(2k+1)\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, puisqu'elle n'admet pas de limites finies en ces points. ∎

3.6 Etudier la continuité de la fonction f sur $\mathbb{R}$:

1°) $f(x) = E\left(\sqrt{\frac{x}{2}}\right)$ 2°) $f(x) = E\left[(\sqrt{2} - 1)\sqrt{x}\right]$

Solution

1°) $f(x) = E\left(\sqrt{\frac{x}{2}}\right)$ f est définie sur $\mathbb{R}^*$ et on a : $\forall n \in \mathbb{N}^*$

$$f(x) = (n-1) \quad \text{si} \quad 2(n-1)^2 \leq x < 2n^2$$
$$f(x) = n \quad \text{si} \quad 2n^2 \leq x < 2(n+1)^2$$

f est alors continue sur $I_n = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} ([2(n-1)^2, 2n^2[)$

de plus $\lim_{\substack{x \to 2n^2 \\ x > 2n^2}} f(x) = n$ et $\lim_{\substack{x \to 2n^2 \\ x > 2n^2}} f(x) = n - 1$

et par conséquent f est discontinue en tout point $x_n = 2n^2$, $n \in \mathbb{N}^*$

2°) $f(x) = E[(\sqrt{2} - 1)\sqrt{x}]$ même raisonnement qu'au 1°).

f est continue sur $\mathbb{R}^+ - \{\frac{n^2}{(\sqrt{2} - 1)^2} / n \in \mathbb{N}^*\}$

3.7 Lever l'indétermination et prolonger la fonction f par continuité en x_0.

1°) $f(x) = \dfrac{\sqrt{1+x} - 1}{\operatorname{tg} x}$, $x_0 = 0$ 2°) $f(x) = (1 - \log x)(\log(x - e))$, $x_0 = e$

Solution

1°) $f(x) = \dfrac{\sqrt{1+x} - 1}{\operatorname{tg} x}$ f est définie sur $[-1, +\infty[- \{ k\pi ; (2k+1)\pi/2 / k \in \mathbb{N}\}$

f est définie au voisinage de $x_0 = 0$

et $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x}{\operatorname{tg} x . (\sqrt{x+1} + 1)} = \dfrac{1}{2}$

donc en posant f (0) = 1/2, on prolonge ainsi f par continuité en $x_0 = 0$.

2°) $f(x) = (1 - \log x) \log(x - e)$.

$D_f =]e ; +\infty[$

Calculons $\lim\limits_{x \to e^+} f(x)$

$$\lim_{x \to e^+} f(x) = \lim_{x \to e^+} \frac{1 - \log x}{e - x} . (e - x)(\log(x - e)$$

Or $\lim\limits_{x \to e^+} \dfrac{1 - \log x}{e - x} = \lim\limits_{x \to e^+} \dfrac{\log x - \log e}{x - e} = (\log)'(e) = \dfrac{1}{e}$

et $\lim\limits_{x \to e^+} (e - x) \log (x - e) = 0$. d'où $\lim\limits_{x \to e^+} f(x) = 0$.

On peut alors prolonger f par continuité en $x_0 = e$ en posant f (e) = 0 ■

3.8 Lever l'indétermination et prolonger la fonction f par continuité en x_0 :

1°) $f(x) = \sqrt{\dfrac{1}{x^3} + \dfrac{1}{x} + 1} - \sqrt{\dfrac{1}{x^3} + \dfrac{1}{x} - 1}$; $x_0 = 0$

2°) $f(x) = \dfrac{\sin \pi x}{\sin 2\pi x}$, $x_0 = 1$

3°) $f(x) = \dfrac{1 - 2\cos x}{\pi - 3x}$, $x_0 = \pi/3$.

Solution

1°) f est définie sur un intervalle du type] o , a] , a > 0

et $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{2}{\sqrt{1/x^3 + 1/x + 1} + \sqrt{1/x^3 + 1/x - 1}} = 0$

donc f est prolongeable par continuité à droite en $x_0 = 0$ et on prend f (0) = 0

2°) $f(x) = \dfrac{\sin \pi x}{\sin 2\pi x}$ puisque $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = -1/2$ on pourra prolonger f par continuité en posant f (1) = - 1/2.

3°) $f(x) = \dfrac{1 - 2\cos x}{\pi - 3x}$. On pose $t = \pi - 3x$.

donc $1 - 2\cos x = 1 - \cos t/3 - \sqrt{3}\ \sin t/3$.

et puisque $1 - \cos t/3 \underset{0}{\sim} t^2/18$ et $\sin t/3 \underset{0}{\sim} t/3$

donc $\lim\limits_{x \to \pi/3} f(x) = \lim\limits_{t \to 0} \dfrac{1 - \cos t/3}{t} - \lim\limits_{t \to 0} \sqrt{3}\,.\dfrac{\sin t/3}{t} = -\sqrt{3}/3$

et en posant $f(\pi/3) = -\sqrt{3}/3$ f est prolongé par continuité en $x_0 = \pi/3$.

3.9

> Soit f la fonction définie de [0 , 1] dans $\mathbb{R}$, par :
>
> $$f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$$
>
> a) Montrer directement que f est strictement monotone.
>
> b) En déduire que f est bijective et déterminer f^{-1}

Solution

a) Soit $(x_1, x_2) \in [0, 1] \times [0,1]$

Supposons que $x_1 > x_2$

On a $f(x_1) - f(x_2) = \dfrac{(x_1 - x_2)(1 - x_1 x_2)}{(1 + x_1^2)(1 + x_2^2)}$

donc le signe de $\dfrac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2}$ est celui de $(1 - x_1 x_2)$

mais $0 \leq x_1 \leq 1$ et $0 \leq x_2 \leq 1$ donc $1 - x_1 x_2 \geq 0$.

f est alors strictement croissante (car $1 - x_1 x_2 > 0$)

b) f étant continue sur [0,1], strictement monotone donc elle est bijective de [0,1] sur f ([0,1]) = [0,1/2].

Déterminons f^{-1}

f^{-1} est définie sur [0,1/2] à valeurs dans [0,1] , continue et strictement croissante sur [0,1/2].

De plus par définition on a pour $x \in [0,1/2]$ et $y \in [0,1]$ $y = f^{-1}(x) \Leftrightarrow x = f(y)$.

donc $x = \dfrac{y}{1 + y^2} \Leftrightarrow xy^2 - y + x = 0$

ce qui donne pour $x \in]0, 1/2]$ une unique solution :

$$y = \frac{1 - \sqrt{1 - 4x^2}}{2x} \quad \text{appartenant à l'intervalle }]0, 1]$$

D'où

$$f^{-1}(x) = \frac{1 - \sqrt{1 - 4x^2}}{2x}$$

■

3.10 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue et vérifiant :
$\lim_{x \to +\infty} f(x) = A$; $\lim_{x \to -\infty} f(x) = B$ avec $AB < 0$. A et B peuvent être infinis.

a) Montrer qu'il existe deux réels x_0 et y_0 tels que $f(x_0) . f(y_0) < 0$.

b) En déduire que l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution réelle.

c) Etudier le cas où f est un polynôme de degré impair.

Solution

a) Distinguons plusieurs cas :

1er cas : Supposons que A et B sont finis et que $AB < 0$.
(on prend par exemple $A > 0$ et $B < 0$ et le cas contraire se démontre de la même manière).
On a par l'hypothèse $\lim_{x \to +\infty} f(x) = A$ et $\lim_{x \to -\infty} f(x) = B$.

Donc $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \ \alpha > 0$ tel que $x > \alpha$ on a $|f(x) - A| < \varepsilon$. (1)

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \ \beta > 0$ tel que $x < -\beta$ on a $|f(x) - B| < \varepsilon$. (2)

Prenons alors $\varepsilon = A$ dans (1) et $\varepsilon = -B$ dans (2).

On a alors pour tout $x > \alpha$ $\quad 0 < f(x) < 2A$

et pour tout $x < -\beta$ $\quad 2B < f(x) < 0$

Il suffit de prendre n'importe quel $x_0 > \alpha$

et $y_0 < -\beta$ on a bien $f(x_0) . f(y_0) < 0$.

2ème cas : Supposons que A et B sont infinis par exemple $A = +\infty$ et $B = -\infty$.
Puisque $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

on a alors :

$\forall \alpha > 0 \quad \exists \beta > 0$ tel que $x > \beta$ on a $f(x) > \alpha$

$\forall \alpha > 0 \quad \exists \beta' > 0$ tel que $x < -\beta'$ on a $f(x) < -\alpha$.

Donc : $\forall x > \beta \quad f(x) > 0$

$\forall x < -\beta' \quad f(x) < 0$

Il suffit donc de prendre $x_0 \in]\beta, +\infty[$.

et $y_0 \in]-\infty, -\beta'[$ on a bien $f(x_0) . f(y_0) < 0$.

3ème cas : Supposons A fini et B infini (Par exemple $A > 0$ et $B = -\infty$).
En combinant le choix du 1er cas et du 2ème cas. On démontre aisement le résultat.

b) f est continue sur $\mathbb{R}$, elle l'est donc sur $[x_0, y_0]$.

et $f(x_0) \cdot f(y_0) < 0$

Donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires :

$\exists\ \gamma\ ]x_0, y_0[$ tel que $f(\gamma) = 0$.

c) Si f est une fonction polynôme de degré impair, elle vérifie les hypothèses de l'enoncé donc appliquer a) et b) et conclure :
Tout polynôme de degré impair admet au moins une racine réelle. ■

3.11 Démontrer que l'équation (E) admet au moins une solution réelle.

$$\text{(E)} \qquad \frac{1}{2}\cos x - \frac{1}{(x+1)^2} = 0$$

Solution

Posons $f(x) = \dfrac{1}{2}\cos x - \dfrac{1}{(x+1)^2}$

f est définie, continue sur tout intervalle ne contenant pas - 1.

De plus $f(2\pi) = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{(2\pi+1)^2} > 0$

et $f(3\pi) = -\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{(3\pi+1)^2} < 0$

Donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires il existe $c \in\ ]2\pi, 3\pi[$ tel que $f(c) = 0$.

■

3.12 Montrer que les équations suivantes admettent au moins une solution réelle.

a) $x^3 - 3x^2 + 15x - 7 = 0$.

b) $x^4 - 2x^3 + 3x^2 - x - 5 = 0$

c) $1 + \sin x - x^2 = 0$.

Solution

a) On pourra, en étudiant les variations de la fonction f définie par $f(x) = x^3 - 3x^2 + 15x - 7$ démontrer que $f(x) = 0$ admet une solution ou encore en remarquant que $f(0) = -7$ et $f(1) = 6$

Et, par application du théorème des valeurs intermédiares il exixte $x_0 \in\ ]0, 1[$ tel que $f(x_0) = 0$.

on peut étendre ce résultat à tout polynôme de degré impair (voir Ex 3.10)

b) Même raisonnement qu'en a) sur $[-1, 0]$

c) Posons $f(x) = 1 + \sin x - x^2$

f est continue sur $[0, \pi]$ et on a : $f(0) = 1$ et $f(\pi) = 1 - \pi^2 < 0$

d'où l'équation $f(x) = 0$ admet une solution dans l'intervalle $]0, \pi[$ ■

3.13 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue admettant des limites nulles en $+\infty$ et en $-\infty$.

a) Montrer que f est bornée.

b) Est-ce que les deux bornes sont nécessairement atteintes ?

c) Est-ce que l'une au moins des deux bornes est nécessairement atteinte ?

Solution

a) Comme $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = 0$, on a d'après la définition de la limite en prenant $\varepsilon = 1$:

$$\exists\ A < 0 \ : \forall\ x \in \mathbb{R}\ \ [x < A \Rightarrow |f(x)| < 1]$$

et
$$\exists\ B > 0 \ : \forall\ x \in \mathbb{R}\ \ [x > B \Rightarrow |f(x)| < 1]$$

Ainsi : $\forall\ x \in\ ]-\infty, A[\ \cup\ ]B, +\infty[\ :\ |f(x)| < 1$.

De plus f est continue sur $\mathbb{R}$ donc en particulier sur $[A, B]$. Elle est donc bornée sur $[A,B]$:

$$\exists\ M > 0\ /\ \forall\ x \in [A,B] : |f(x)| < M.$$

si l'on pose $M_0 = \sup(1,M)$ il est clair que $\forall\ x \in \mathbb{R}\ \ |f(x)| < M_0$.

Par conséquent, f est bornée.

b) les deux bornes ne sont pas nécessairement atteintes. Il suffit pour s'en apercevoir de considérer la fonction f définie par : $f(x) = e^{-x^2}$

f est continue sur $\mathbb{R}$ et $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = 0$

Une étude succincte de la fonction f, montre que :

$\inf_{x \in \mathbb{R}} f(x) = 0$ et $\sup_{x \in \mathbb{R}} f(x) = 1$

La borne supérieure est atteinte car $f(0) = 1$, tandis que la borne inférieure ne l'est pas puisque la fonction exponentielle ne s'annule jamais.

c) Montrons que l'une au moins des deux bornes est nécessairement atteinte.

Supposons qu'aucune des deux bornes n'est atteinte.

Soit $\alpha = \inf f$ et $\beta = \sup f$.

Si f n'est pas identiquement nulle (cas trivial), au moins l'une des deux bornes n'est pas nulle.

Supposonss que $\alpha \neq 0$ (le cas $\beta \neq 0$ se déduit de celui-ci en considérant la fonction $g = -f$).

D'après l'hypotèse $(\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = 0)$ on peut écrire, en prenant $\varepsilon = |\alpha|/2$ dans la définition de la limite que :

(1) $\exists\ a > 0\ /\ \forall\ x \in\ ]-\infty, -a[\ \cup\ ]a, +\infty[\ :\ |f(x)| < |\alpha|/2$

Or par définition de la borne inférieure :

(2) $\forall\ \varepsilon > 0\ /\ \exists\ x \in \mathbb{R}\ /\quad \alpha \leq f(x) < \alpha + \varepsilon.$

si on prend en particulier ε vérifiant $0 < \varepsilon < |\alpha|/2$ la relation (2) devient :

(3) $\forall\ \varepsilon \in]0, |\alpha|/2[\quad \exists\ x_0 \in \mathbb{R}\ :\quad \alpha \leq f(x_0) < \alpha + \varepsilon.$

Et puisque, d'après (1), pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus [-a, a]$. $|f(x)| < |\alpha|/2$ donc $x_0 \in [-a, a]$.

Par conséquent α est alors la borne inférieure def sur $[-a, a]$ or f est définie et continue sur $[-a, a]$ donc elle est bornée et atteint ses bornes.

Ainsi, la borne inférieure α serait atteinte.

Ce qui contredit l'hypothèse et prouve que l'une au moins des deux bornes est nécessairement atteinte.

■

3.14 On considère la fonction f définie dans $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \text{Arcsin}\, x + \text{Arcsin}\, 2x.$$

a) Préciser le domaine de définition de f et montrer qu'elle est injective.

b) Sur quel intervalle, la fonction réciproque de f est elle définie ?

c) Résoudre l'équation $f(x) = 2\pi/3$.

Solution

a) f est définie si et seulement si : $-1 \leq x \leq 1$ et $-1 \leq 2x \leq 1$.

Donc $D_f = [-1/2, 1/2]$.

Montrons que f est injective. Pour cela, il suffit de montrer que f est strictement monotone, les deux fonctions $x \to \text{Arcsin}\, x$ et $x \to 2x$ sont strictement croissantes Donc leur composée est strictement croissante sur D_f. Comme f est la somme de deux fonctions strictement croissantes, f est aussi strictement croissante sur D_f.

C'est-à-dire : $\forall\ x, x' \in D_f\quad [x < x' \Rightarrow f(x) < f(x')]$

C'est-à-dire $\forall\ x, x' \in D_f\quad [x \neq x' \Rightarrow f(x) \neq f(x')]$

Donc f est injective.

b) f étant continue et strictement croissante, c'est une bijection de $[-1/2, 1/2]$ sur $[f(-1/2), f(1/2)] = [-2\pi/3, 2\pi/3]$.

Par conséquent f^{-1} est définie sur $[-2\pi/3, 2\pi/3]$.

c) $f(x) = 2\pi/3 \quad \Leftrightarrow \quad x = f^{-1}(2\pi/3) \quad \Leftrightarrow \quad x = 1/2.$

3.15 Soit f une fonction définie et continue de $[a,b]$ dans $[a,b]$ telle que f o f soit injective. Montrer que f est injective et que f o f est strictement croissante.

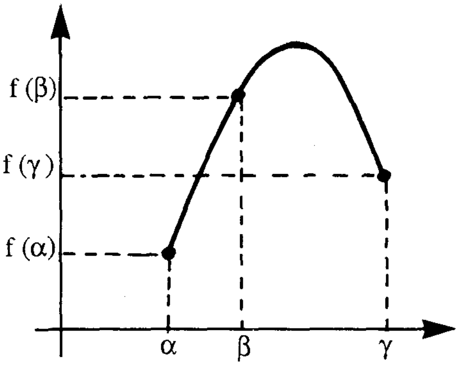
Solution

Montrons d'abord que f est injective.

Soit $(x,x') \in [a,b]^2$. Supposons que $f(x) = f(x')$

Par hypothèse : $f(x) \in [a,b]$ et $f(x') \in [a,b]$
f est alors une application de $[a,b]$ dans $[a,b]$ donc : $f(f(x)) = f(f(x'))$ c'est à dire $f \circ f(x) = f \circ f(x')$.
Or $f \circ f$ est injective donc $x = x'$ et par suite f est injective.

Montrons maintenant que $f \circ f$ est strictement croissante.
Pour cela, il suffit de démontrer que f est strictement monotone.
Supposons le contraire. Il existe alors trois réels $\alpha < \beta < \gamma$ deux à deux dinstincts et tels que $f(\alpha) < f(\gamma) < f(\beta)$ (l'inégalité dans le sens contraire conduirait au même résultat).



f étant continue sur $[a,b]$ donc en particulier sur $[\alpha,\beta]$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires elle atteint toutes les valeurs situées entre $f(\alpha)$ et $f(\beta)$.
Or $f(\gamma) \in \,]f(\alpha), f(\beta)[$ donc :
$\exists\, c \in \,]\alpha, \beta[$ tel que $f(\gamma) = f(c)$.
c'est-à-dire : $\alpha < c < \beta < \gamma$ d'où $c < \gamma$.
Ce qui est absurde puisque f est injective.
Par conséquent f est nécessairement strictement monotone.
Ce qui entraîne évidemment que $f \circ f$ est strictement croissante.

■

3.16 Soient f et g deux fonctions numériques définies et continues sur un même intervalle $[a,b]$ de $\mathbb{R}$ et telles que : $\forall\ x \in [a,b] \quad f(x) > g(x)$.
Montrer qu'il existe un réel $k > 0$ tel que :

$$\forall\ x \in [a,b] \qquad f(x) \geq g(x) + k.$$

Solution

Considérons la fonction φ définie sur l'intervalle $[a,b]$ par :

$$\forall\ x \in [a,b] \qquad \varphi(x) = f(x) - g(x).$$

φ est continue sur l'intervalle fermé borné $[a,b]$ donc elle est bornée et atteint ses bornes.
Soit k sa borne inférieure sur $[a,b]$: $k = \inf\limits_{x \in [a,b]} \varphi(x)$

Donc $\quad \forall\ x \in [a,b] \qquad \varphi(x) \geq k \qquad (1)$

De plus k est atteint, il existe $x_0 \in [a,b]$ tel que $\varphi(x_0) = k$.
Comme par hypothèse $\varphi < 0$, on a : $\varphi(x_0) > 0$, c'est-à-dire $k > 0$.
Par conséquent, d'après (1) :
$\exists\ k \in \mathbb{R}^*_+ \qquad \forall\ x \in [a,b] \qquad f(x) \geq g(x) + k.$

■

3.17 Soit f une fonction définie et continue sur un intervalle fermé borné [a,b]. Soient $x_1, x_2 \ldots x_n$, n valeurs de [a,b]. Prouver qu'il existe un élément $c \in [a,b]$ tel que :

$$f(c) = \frac{1}{n}\,[\,f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_n)\,]$$

Solution

f est définie et continue sur [a,b], donc elle est bornée sur [a,b] et atteint est bornes.

Posons $m = \inf f$ et $M = \sup f$, $m \le f(x) \le M.\quad \forall x \in [a,b]$.

Par suite : $m \le f(x_i) \le M$ pour tout $i = 1, 2, 3, \ldots, n$.

Ce qui donne $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} m \le \sum_{i=1}^{n} f(x_i) \le \sum_{i=1}^{n} M$

il vient donc : $\displaystyle m \le \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x_i) \le M$

D'après le théorème des valeurs intermédiaires il existe $c \in [a,b]$ tel que

$$f(c) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x_i).$$

3.18 Soit f une fonction définie et continue sur [0,1] telle que $f(0) = f(1)$. Démontrer que, pour tout entier n non nul, il existe un réel x_0 de l'intervalle [0,1] tel que :

$$f(x_o) = f(x_o + \frac{1}{n})$$

Solution

Considérons la fonction g définie sur l'intervalle [0 , 1 - 1/n] par :

$$g(x) = f(x + 1/n) - f(x)$$

g est définie, continue sur [0, 1 - 1/n]

d'après l'exercice **3.17** : si l'on prend n valeurs $x_1, x_2, \ldots x_n$ de [0, 1 - 1/n], il existe

$x_0 \in [0 , 1 - 1/n]$ tel que :

$$g(x_o) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} g(x_i)$$

Prenons maintenant $x_i = \dfrac{n-i}{n}$ pour tout $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$

Or
$$\sum_{i=1}^{n} g(x_i) = \sum_{i=1}^{n} f(\frac{n+1-i}{n}) - f(\frac{n-i}{n})$$
$$= f(1) - f(0).$$

D'où : $g(x_0) = 0$ c'est-à-dire $f(x_0) = f(x_0 + 1/n)$ ■

3.19 Soient f et g deux fonctions continues sur $\mathbb{R}$ et vérifiant, pour tout $x \in \mathbb{Q}$, $f(x) = g(x)$. Montrer que $f = g$

Solution

Posons $\varphi(x) = f(x) - g(x)$.

Montrons que $\forall x \in \mathbb{R} \quad \varphi(x) = 0$

Supposons qu'il existe $x_0 \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ tel que $\varphi(x_0) \neq 0$.

φ étant continue donc elle garde un signe constant au voisinage de x_0.

Supposons $\varphi(x_0) > 0$ donc :

$\exists \alpha > 0 / \forall x \in]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[\;:\; \varphi(x) > 0$.

Or $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$ donc

$$\exists r \in]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[\cap \mathbb{Q}$$

et evidemment $\varphi(r) > 0$, ce qui absurde puisque $\varphi \equiv 0$ sur $\mathbb{Q}$ par hypothèse.

D'où $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = g(x)$.

On raisonne d'une manière analogue si $\varphi(x_0) < 0$.

3.20 1°) Soit f une fonction numérique uniformément continue sur $[0, +\infty[$.
Montrer qu'il existe $a \in \mathbb{R}^*_+$ et $b \in \mathbb{R}$ tels que :

$$\forall x \in [0, +\infty[\quad |f(x)| \leq ax + b$$

2°) A-t-on la réciproque ?

Solution

1°) f est uniformément continue sur $[0, +\infty[$. Donc :

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \eta > 0 \; \forall (x, x') \in \mathbb{R}_+^{*2} \; [|x - x'| < \eta \Rightarrow |f(x) - f(x')| < \varepsilon].$$

Prenons $\varepsilon = 1$. Soit η le pas correspondant :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad |f((n+1)\eta) - f(n\eta)| \leq 1.$$

Par suite : $\forall n \in \mathbb{N} \quad |f(n\eta) - f(0)| \leq n$

Soit $x \in \mathbb{R}^+$ et soit $n \in \mathbb{N}$, l'entier tel que : $n\eta \leq x < (n+1)\eta$

on a $|x - n\eta| < \eta \Rightarrow |f(x) - f(n\eta)| < 1$

d'où $|f(x) - f(0)| \leq n + 1$ et par suite on a :

$|f(x) \leq |f(0)| + n + 1 \leq |f(0)| + x/\eta + 1$

Posons maintenant $a = 1/\eta$ et $b = |f(0)| + 1$

Ainsi $\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad |f(x)| \leq ax + b$.

2°) Considérons la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+$ par :

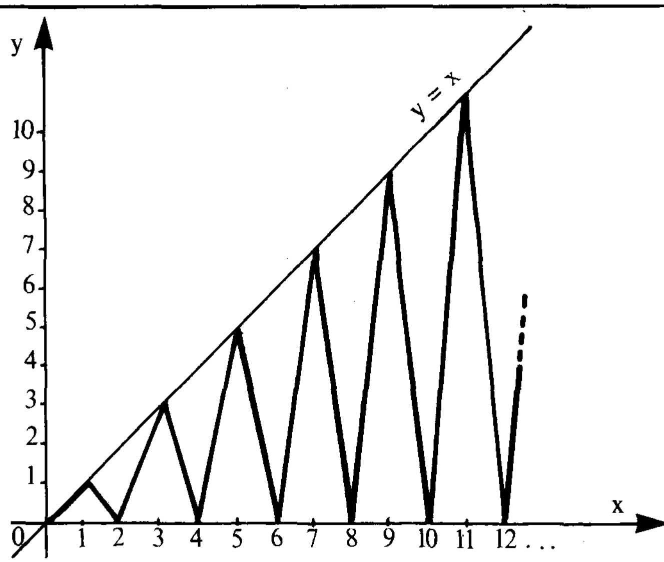
$$f(x) = \begin{cases} (2k+1)(x - 2k) & \text{si} \quad x \in [2k, 2k+1] \; k \in \mathbb{N} \\ -(2k+1)[x - (2k+2)] & \text{si} \quad x \in [2k+1, 2k+2]. \end{cases}$$

f est définie, continue sur $\mathbb{R}+$ et vérifie, par construction :

$$\forall x \in \mathbb{R}+ \quad |f(x)| \leq x.$$

Pourtant f n'est pas uniformément continue sur $\mathbb{R}+$. En effet :

prenons $\varepsilon = 1$.



Soit $\eta > 0$. Montrons qu'il existe $(x,x') \in \mathbb{R}^2$ tels que :

$|x - x'| < \eta$ et $|f(x) - f(x')| \geq 1$.

posons $\alpha = \inf(\eta/2 , 1)$. Soit $k \in \mathbb{N}$ tels que :

$k \geq (1/\alpha - 1)/2$

prenons $x = 2k$ et $x' = 2k + \alpha$

on a bien $|x - x'| < \eta$

par ailleurs $|f(x) - f(x')| = \alpha(2k + 1)$

entraîne alors que $|f(x) - f(x')| \geq 1$.

Conclusion :

Si f est une fonction uniformément continue sur $\mathbb{R}+$ alors :

$\exists\, a \in \mathbb{R}^*_+$ et $b \in \mathbb{R}$ tels que $\forall x \in \mathbb{R}+$ $|f(x)| \leq ax + b$.

La réciproque est fausse.

FONCTIONS DERIVABLES

4.1. Etudier la dérivabilité de la fonction f , dans chacun des cas suivants

1) $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$ 2) $f(x) = \log(x + \sqrt{x^2 - 1})$

3) $f(x) = \dfrac{1 - x^5}{1 - x}$

Solution

1) $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$ f est définie sur $]\infty, -1] \cup [1, +\infty[$. dérivable sur son domaine de définition comme composée de fonctions dérivables, sauf aux points - 1 et 1.

Etudions la dérivabilité aux points $x_0 = -1$, $x_1 = 1$.

$$\lim_{x \to -1^-} \frac{f(x) - f(-1)}{x + 1} = \lim_{x \to -1^-} \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x + 1} = \lim_{x \to -1^-} \sqrt{\frac{x^2 - 1}{(x + 1)^2}}$$

donc :

$$\lim_{x \to -1^-} \frac{f(x) - f(-1)}{x + 1} = \lim_{x \to -1^-} \sqrt{\frac{x - 1}{x + 1}} = -\infty$$

f n'est pas dérivable au point $x_0 = -1$. On montre d'une manière analogue que f n'est pas dérivable à droite au point $x_1 = 1$.

2) $f(x) = \log(x + \sqrt{x^2 - 1})$

f est définie sur $[1, +\infty[$, dérivable sur $]1, +\infty[$

Etude de la dérivabilité au point 1.

on a $$\lim_{x \to 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1^+} \frac{\log(x + \sqrt{x^2 - 1})}{x - 1}$$

$$\lim_{x \to 1^+} \left[\left(\frac{\log x}{x - 1}\right)\right] + \left(\frac{\log(1 + \sqrt{1 - 1/x^2})}{x - 1}\right)$$

Si l'on pose $t = x - 1$, on obtient alors :

$$\lim_{x \to 1^+} \frac{\log x}{x - 1} = \lim_{t \to 0^+} \frac{\log(1 + t)}{t} = 1$$

de plus : $\sqrt{1 - 1/x^2}$ tend vers 0^+ quand x tend vers 1^+ , donc :

$$\log(1 + \sqrt{1 - 1/x^2}) \underset{1}{\sim} \sqrt{1 - 1/x^2}$$

Donc $\lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{\log(1 + \sqrt{1 - 1/x^2})}{x - 1} = \lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{\sqrt{1 - 1/x^2}}{x - 1}$

mais $\lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{\sqrt{1 - 1/x^2}}{x - 1} = \lim\limits_{x \to 1^-} \sqrt{\dfrac{x^2 - 1}{x^2(x - 1)^2}} = \lim\limits_{x \to 1^+} \sqrt{\dfrac{x + 1}{x^2(x - 1)}} = -\infty$

D'où f n'est pas dérivable en $x_0 = 1$.

3°) $f(x) = \dfrac{1 - x^5}{1 - x}$

f est dérivable en tout point de $\mathbb{R}$ sauf peut - être en 1 puisque pour tout $x \neq 1$:

$$f(x) = \frac{1 - x^5}{1 - x} = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$$

or $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = \lim\limits_{x \to 1} (x^4 + x^3 + x^2 + x + 1) = 5$

donc f est prolongeable par continuité en 1.

En posant $f(1) = 5$, calculons $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{f(x) - f(1)}{x - 1}$ si elle existe

$$\lim_{x \to 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{x^5 - 5x + 4}{(x - 1)^2} = \lim_{x \to 1} x^3 + 2x^2 + 3x + 4 = 10$$

D' où f est dérivable en 1 et on a $f'(1) = 10$.

4.2.

> Etudier la dérivabilité de la fonction f :
>
> 1) $f(x) = |x^2 - 3|$
>
> 2) $f(x) = \sqrt{\dfrac{x\sin x}{1 - \cos x}}$
>
> 3°) $f(x) = \begin{cases} \exp\left(\dfrac{1}{x^2 - a^2}\right) & \text{si } |x| < a. \\ 0 & \text{si } |x| \geq a \end{cases}$ ou $a \in \mathbb{R}^+$

Solution

1) $f(x) = |x^2 - 3|$ f est définie , continue en tout point de $\mathbb{R}$, dérivable sur $\mathbb{R}$, sauf peut-être en 3 et - 3.

Etudions la dérivabilité aux points $x_0 = +3$, $x_1 = -3$.

$$\lim_{x \to 3^+} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3} = \lim_{x \to 3^+} \frac{x^2 - 3}{x - 3} = 9$$

et $\lim\limits_{x \to 3^-} \dfrac{f(x) - f(3)}{x - 3} = \lim\limits_{x \to 3^-} \dfrac{3 - x^2}{x - 3} = -9$

donc $f'_d(3) = 9$ et $f'_g(3) = 9$

La dérivée à droite est différente de la dérivée à gauche . La fonction f est dérivable à droite , dérivable à gauche au point 3 mais n'est pas dérivable au point 3.
A l'aide d'un raisonnement analogue on montre que f n'est pas dérivable au point -3

2) $f(x) = \sqrt{\dfrac{x\sin x}{1 - \cos x}}$

f est définie si $x\sin x \geq 0$ et $x \neq 2k\pi$ donc :

$$D_f = \left(\bigcup_{k\in\mathbb{Z}^-} [(2k-1)\pi , 2k\pi [\right) \cup \left(\bigcup_{k\in\mathbb{Z}^+}]\, 2k\pi , (2k+1)\pi] \right)$$

f est dérivable sur D_f. f ne peut-être définie par prolongement par continuité aux points $x_k = 2k\pi$ pour $k \in \mathbb{Z}^*$.

Mais en 0 on a $\lim_{x \to 0} f(x) = \sqrt{2}$. Par conséquent, en posant $f(0) = \sqrt{2}$

on aura : $\lim_{x \to 0^+} \dfrac{f(x) - f(0)}{x} = +\infty$ et $\lim_{x \to 0^-} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = -\infty$

Conclusion : la fonction f, prolongée par continuité, n'est pas dérivable en 0.

3) f est définie sur $\mathbb{R}$, continue en tout point de $\mathbb{R}$. Elle est dérivable sur $\mathbb{R}$ sauf peut-être aux points a et - a .
Etudions la dérivabilité au point a.

$\lim_{x \to a^+} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} = 0$ (car $f(x) = 0$ et $f(a) = 0$).

$$\lim_{x \to a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \to a^-} \frac{1}{x - a} e^{\frac{1}{x^2 - a^2}}$$

Posons $\dfrac{1}{x^2 - a^2} = X$ alors quand $x \to a^-$, $X \to -\infty$ et $\lim_{X \to -\infty} X e^X = 0$

D'où $\lim_{x \to a^-} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} = 0$.

Par conséquent, f est dérivable au point a et $f'(a) = 0$.
D'une manière analogue , on démontre que f est dérivable en - a.

4.3. Soit f une fonction définie sur un voisinage de x_0.
Considérons la fonction g définie par :

$$g(x) = \frac{f(x_0 + x) - f(x_0 - x)}{2x} .$$

a) Montrer que si la fonction f admet une dérivé à droite et une dérivée à gauche aupoint x_0, alors g(x) admet une limite lorsque x tend vers 0.
Exprimer alors cette limite en fonction de $f'_d(x_0)$ et $f'_g(x_0)$

b) Etudier la réciproque de la proposition a) en considérant la fonction f définie par $f(x) = x \sin 1/x$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$.

Solution

Puisque f admet une dérivée à droite et une dérivée à gauche au point x_0, on a alors:

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = f'_d(x_0) \quad \text{et} \quad \lim_{h\to 0^-} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = f'_g(x_0) \qquad (1)$$

En remplaçant h par -h dans (1) on a ainsi :

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{f(x_0-h)-f(x_0)}{h} = -f'_d(x_0) \quad \text{et} \quad \lim_{h\to 0^+} \frac{f(x_0-h)-f(x_0)}{h} = -f'_g(x_0)$$

$$\text{or} \quad g(h) = \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{2h} + \frac{f(x_0)-f(x_0-h)}{2h}$$

Donc : $\lim\limits_{h\to 0^+} g(h) = \frac{1}{2}[f'_d(x_0) + f'_g(x_0)]$ et $\lim\limits_{h\to 0^-} g(h) = 1/2[(f'_g(x_0) + f'_d(x_0)]$

D'où $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = 1/2\,[f'_g(x_0) + f'_d(x_0)]$

En particulier si f est dérivable en x_0 on a : $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = f'(x_0)$.

b) Prenons $x_0 = 0$ et $f(x) = x \sin 1/x$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$.

On a : $g(x) = 1/2x\,(x \sin 1/x - x \sin 1/x) = 0$ Donc $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = 0$

Mais f n'est pas dérivable au point 0 :
En effet :

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0} \sin 1/x \qquad \text{qui n'existe pas.}$$

Conclusion : La réciproque de a) est fausse.

4.4. Soit f une fonction définie sur $]-a, a[$ et continue en 0. Vérifiant :

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(kx)}{x} = \ell \quad \text{où k est tel que } 0 < k < 1$$

a) Montrer que f est dérivable en 0 et que $f'(0) = \frac{\ell}{1-k}$

b) Montrer que le résultat reste valable si $k > 1$.

Solution

a) Par hypothèse on a :

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \eta > 0$ tel que $\forall x \,/\, [\,|x| < \eta \Rightarrow \left|\frac{f(x)-f(x)}{x} - \ell\right| < \varepsilon.\,]$

or $0 < k < 1$ donc $|k^p x| < \eta$ pour tout $p \in \mathbb{N}$ et tout x tel que $|x| < \eta$.

$$\text{Donc :} \quad -\varepsilon < \frac{f(x)-f(x)}{x} - \ell < \varepsilon$$

$\forall\, x \,/\, |x| < \eta$ on a : $-\varepsilon < \dfrac{f(kx) - f(k^2x)}{kx} - \ell < \varepsilon$

$$-\varepsilon < \frac{f(k^{n-2}x) - f(k^{n-1}x)}{k^{n-2}x} - \ell < \varepsilon$$

$$-\varepsilon < \frac{f(k^{n-1}x) - f(k^{n}x)}{k^{n-1}x} - \ell < \varepsilon$$

En faisant la somme, membre à membre, des inégalités obtenues, il vient :

$$-\varepsilon(1+k+k^2+\ldots+k^{n-1}) < \frac{f(x) - f(k^nx)}{x} - (1+k+..+k^{n-1})\ell < \varepsilon(1+k+..+k^{n-1})$$

Comme f est continue en 0, en faisant tendre n vers ∞ on obtient :

$$\frac{-\varepsilon}{1-k} \leq \frac{f(x) - f(0)}{x} - \frac{\ell}{1-k} \leq \frac{\varepsilon}{1-k}$$

d'où le résultat .

b) si $k > 1$ et $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x) - f(kx)}{x} = \ell$

Posons $X = kx$, $K = 1/k$ et $L = -\ell/k$ alors : $\ell = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(\frac{1}{k}X) - f(X)}{X}k$

On a alors $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(X) - f(kX)}{X} = L$ avec $0 < K < 1$

Ainsi f est dérivable en 0 et $f'(0) = \dfrac{L}{1-K} = \dfrac{-\ell/k}{1-1/k}$ d'où $f'(0) = \dfrac{\ell}{1-k}$

■

4.5. Pour tout $\alpha \geq 0$ on pose : $f_\alpha(x) = \alpha x + x^2 \sin 1/x$ si $x \neq 0$ et $f_\alpha(0) = 0$.

a) Montrer que f_α est continue sur $\mathbb{R}$.

b) Montrer que f_α est dérivable sur $\mathbb{R}$.

c) f'_α est-elle continue en zéro ?

d) Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f_\alpha(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f'_\alpha(x)$

e) on pose $x_k = 1/k\pi$, $k \in \mathbb{Z}^*$ calculer $f'_\alpha(x_k)$

f) Montrer que si $0 \leq \alpha < 1$ alors f_α n'est monotone sur aucun intervalle ouvert contenant 0.

g) Montrer que : $\forall\, k \in \mathbb{Z}^*$, f_1 admet un maximum local stricte au point x_{2k}.

En déduire que f_1 n'est monotone sur aucun intervalle ouvert contenant 0.

Solution

a) $\lim\limits_{x\to 0} f_\alpha(x) = \lim\limits_{x\to 0} (\alpha x + x^2 \sin 1/x) = 0 = f_\alpha(0)$.

(car $\lim\limits_{x\to 0} x^2 \sin 1/x = 0$ puisque $\sin 1/x$ est bornée et $x^2 \to 0$)

b) sur $\mathbb{R}^*$, f_α est dérivable comme somme , produit et composée de fonctions.

dérivables sur $\mathbb{R}^*$ et $f'_\alpha(x) = \alpha + 2x \sin 1/x - \cos 1/x$

De plus on a $\lim\limits_{x\to 0} f_\alpha(x)/x = \lim\limits_{x\to 0} (\alpha + x \sin 1/x) = \alpha$ puisque $|x \sin 1/x| \leq |x|$.

donc f_α est dérivable en zéro et $f'_\alpha(0) = \alpha$

c) Si f'_α etait continue en zéro , $\lim\limits_{x\to 0} \cos 1/x = \lim\limits_{x\to 0} (\alpha + 2x \sin 1/x - f'_\alpha(x)) = 0$

Ce qui est faux puisque $\lim\limits_{x\to 0} \cos 1/x$ n'existe pas.

En effet : en considérant les deux suites $(x_k) = 1/2k\pi$ et $y_k = \dfrac{1}{(2k+1)\pi}$ pour $k \geq 1$ il vient :

$\lim\limits_{k\to+\infty} \cos 1/x_k = 1$ et $\lim\limits_{k\to+\infty} \cos 1/y_k = -1$.

d) $\lim\limits_{x\to+\infty} x \sin 1/x = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sin 1/x}{1/x} = 1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \cos 1/x = 1$

Donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f_\alpha(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} x\left(\alpha + \dfrac{\sin 1/x}{1/x}\right) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f'_\alpha(x) = \alpha + 1$

e) Pour $x_k = 1/k\pi$, $(k \in \mathbb{Z}^*)$ on a $f'_\alpha(x_k) = \alpha - \cos k\pi$

donc : $f'_\alpha(x_k) = \alpha - (-1)^k$.

f) Soit $0 \leq \alpha < 1$. Supposons que f_α soit monotone sur un intervalle de la forme $]-a, a[$ ou $a > 0$.

f'_α doit alors garder un signe constant sur l'intervale $]-a, a[$.

Or pour k assez grand , x_{2k} et x_{2k+1} appartiennent à $]-a, a[$ et

$$f'_\alpha(x_{2k}) = \alpha - 1 < 0 \quad \text{et} \quad f'_\alpha(x_{2k+1}) = \alpha + 1 > 0.$$

D'où f_α n'est monotone sur aucun intervalle ouvert contenant 0.

g) On a $f'_1(x_{2k}) = 1 - 1 = 0$ et $f''_1(x_{2k}) = -4k\pi < 0$ donc f'_1 est strictement décroissante au voisinage de x_{2k} et x_{2k} est un maximum local de f_1.

Par conséquent f_1 n'est monotone dans aucun intervalle ouvert contenant 0 :

si k est assez grand , $x_{2k} \in]-a, a[$,

$f'_1(x) > 0$ si $x < x_{2k}$ et $f'_1(x) < 0$ si $x > x_{2k}$ (pour x suffisamment proche de x_{2k})

4.6 Soit f une fonction de classe C^1. Considérons la suite $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$u_0 \text{ donné} \quad \text{et} \quad u_{n+1} = f(u_n).$$

On suppose que (u_n) n'est pas stationnaire. Montrer que :

Si (u_n) converge vers ℓ alors $|f'(\ell)| \leq 1$.

Solution

f étant continue, on peut écrire $f(\ell) = \ell$. Supposons que $|f'(\ell)| > 1$.

Puisque f' est continue, on considère la fonction continue $\varphi(x) = |f'(x)| - 1$.

puisque $\exists\, \varepsilon > 0 \ / \ \forall x \in]\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon[\quad |f'(x)| > 1.$

Et comme $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers ℓ

$$\exists\, N \in \mathbb{N} \quad / \quad \forall n \geq N \quad u_n \in]\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon[$$

Appliquons le théorème des accroissements finis entre u_n et ℓ :

Il existe c entre u_n et ℓ, donc $c \in]\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon[$, tel que :

$$(f(u_n) - \ell) = f'(c)(u_n - \ell)$$

Ainsi $\quad |u_{n+1} - \ell| = |f'(c)|\ |u_n - \ell|$

$$|u_{n+1} - \ell| > |u_n - \ell| \quad \text{puisque } c \in]\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon[$$

Cette inégalité étant vraie pour tout $n \geq N$, on a :

$$\forall n \geq N \quad |u_n - \ell| \geq |u_N - \ell|$$

or $|u_N - \ell| > 0$, puisque la suite $\{u_n\}$ est non stationnaire, donc la suite $\{|u_n - \ell|\}$ ne peut tendre vers 0 et $\{u_n\}$ ne peut converger vers ℓ. Ce qui contredit l'hypothèse.

Ainsi $|f'(\ell)| \leq 1$ ■

4.7. Soit la fonction définie par : $f(x) = (x^2 - 1)^n$, $n \in \mathbb{N}^*$

a) Montrer que l'on a : $(x^2 - 1) f'(x) = 2nx f(x)$. (1)

b) En déduire que l'on a : $(x^2 - 1) f^{(n+2)}(x) + 2x f^{(n+1)}(x) - n(n+1) f^{(n)}(x) = 0$

Solution

a) On a $f'(x) = 2nx(x^2 - 1)^{n-1}$.

En multipliant par $x^2 - 1$ on a $(x^2 - 1) f'(x) = 2nx f(x)$.

b) En dérivant $(n+1)$ fois la relation (1) il vient :

$$(x^2 - 1) f'(x)\,]^{(n+1)} = [\,2nx f(x)\,]^{(n+1)}$$

En appliqunt la formule de Leibnitz on a donc :

$$\sum_{k=0}^{n+1} C_{n+1}^{k} (x^2 - 1)^{(k)} (f'(x))^{(n+1-k)} = 2n \sum_{k=0}^{n+1} C_{n+1}^{k} x^{(k)} f^{(n+1-k)}(x)$$

or $(x^2 - 1)^{(k)} = 0 \quad \forall k \geq 3 \quad$ et $\quad x^{(k)} = 0 \quad \forall k \geq 2.$

D'où : $\quad (x^2 - 1) f^{(n+2)}(x) + 2x f^{(n+1)}(x) - n(n+1) f^{(n)}(x) = 0$

4.8. Soit $f(x) = \sqrt{1 + x^2}$

a) Démontrer que l'on a : $(1 + x^2) f'(x) = x f(x)$ (1)

b)En déduire la relation :

$$(1 + x^2) f^{(n+2)}(x) + (2n - 1)x f^{(n+1)}(x) + n(n-1) f^{(n)}(x) = 0 \qquad (2)$$

c) Démontrer que $f^{(2n+1)}(0) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Solution

a) On a $f'(x) = \dfrac{x}{\sqrt{1 + x^2}}$

En multipliant par $(1 + x^2)$ on obtient la relation (1).

b) En derivant $(n + 1)$ fois la relation (1) et en utilisant la formule de Leibnitz on a la relation (2).

c) On procède par récurrence : $f'(0) = 0$ la formule est donc vraie pour $p = 0$.

Supposons que : $f^{(2p+1)}(0) = 0$ et montrons que $f^{(2p+3)}(0) = 0$

D'après b) on a :

$$(1 + x^2) f^{(2p+3)}(x) + (4p + 1)x f^{(2p+2)}(x) + 2p(2p+1) f^{(2p+1)}(x) = 0$$

D'où : $f^{(2p+3)}(0) = -2p(2p+1) f^{(2p+1)}(0) = 0$ ■

4.9. On considère la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = \begin{cases} e^{\frac{-1}{x^2-1}} & \text{si } |x| < 1 \\ 0 & \text{si } |x| \geq 1 \end{cases}$$

Montrer que f est indéfiniment dérivable.

Solution

Il est clair que f est définie, continue sur $\mathbb{R}$ et dérivable sur $\mathbb{R} - \{-1, 1\}$.

De plus pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$f^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{(x^2 - 1)^{2n}} \cdot e^{-\frac{1}{x^2-1}} \quad \text{si } |x| < 1. \qquad f^{(n)}(x) = 0 \quad \text{si } |x| \geq 1.$$

Où P_n est un polynôme de degré n.

$$\lim_{x \to 1} f^{(n)}(x) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \to 1} \frac{f^{(n)}(x) - f^{(n)}(1)}{x - 1} = 0$$

$$\lim_{x \to -1} f^{(n)}(x) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \to -1} \frac{f^{(n)}(x) - f^{(n)}(-1)}{x - 1} = 0$$

D'où f est indéfiniment dérivable sur tout $\mathbb{R}$. ■

4.10. Peut-on appliquer le théorème de Rolle aux fonctions suivantes :

a) $f(x) = \sin^2 x$ sur $[0, \pi]$.

b) $f(x) = \dfrac{1 - \cos 2\pi x}{x}$ sur $[-1, 1]$.

c) $f(x) = 1 - \sqrt[5]{x^4}$ sur $[-1, 1]$.

d) $f(x) = \dfrac{\sin x}{2x}$ sur $[-\pi/2, \pi/2]$

Solution

a) f est continue sur $[0, \pi]$, dérivable sur $]0, \pi[$ et $f(0) = f(\pi)$ donc on peut appliquer le théorème de Rolle à f sur $[0, \pi]$

Il existe alors $c \in]0, \pi[$ tel que $f'(c) = 0$.

$$[2\sin c \,.\, \cos c = 0 \quad \Rightarrow \quad c = \pi/2\,]$$

b) f est définie sur $[-1, 1] - \{0\}$, et $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$ car $1 - \cos 2\pi x \underset{0}{\sim} 4\pi^2 x^2/2$.

Donc, en prolongeant f par continuité en 0 en prenant $f(0) = 0$,
f est alors continue sur $[-1, 1]$.

de plus $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x) - f(0)}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos 2\pi x}{x^2} = 2\pi^2$

donc f est dérivable sur $]-1, 1[$ et $f(-1) = f(1)$.
Le théorème de Rolle est alors appliquable à f sur $[-1,1]$ et on a alors l'existence d'un point $c \in]-1,1[$ tel que $f'(c) = 0$.

c) f est definie continue sur $[-1, 1]$ et $f(-1) = f(1)$.
Mais f n'est pas dérivable en 0 donc le théorème ne s'applique pas.

d) $f(-\pi/2) \neq f(\pi/2)$ donc le théorème de Rolle n'est pas appliquable. ■

4.11. Soit f la fonction définie par : $f(x) = \mathrm{Log}\,(1 + \alpha x)$ où $\alpha \in \mathbb{R}^{*}{+}$.
Soient a et b des réels tels que $-1/\alpha < a \leq b$.

a) Démontrer qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que : $f(b) - f(a) = (b - a)\, f'(c)$

b) Détérminer c.

Solution

a) f est définie sur $]-1/\alpha, +\infty[$

Donc f est définie, continue sur $[a, b]$ dérivable sur $]a, b[$

D'aprés le théorème des Accroissements finis, il existe $c \in]a, b[$ tel que :

$$f(b) - f(a) = (b - a)\, f'(c)$$

b) on a $f'(x) = \dfrac{\alpha}{1+\alpha x}$

Donc $\log(1+\alpha b) - \log(1+\alpha a) = \dfrac{\alpha(b-a)}{1+\alpha c}$

D'où : $c = \dfrac{b-a}{\log\left(\dfrac{1+\alpha b}{1+\alpha a}\right)} - \dfrac{1}{\alpha}$ ∎

4.12. Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = x(x+1)(x+2)(x-1)(x-2)(x-3).$$

Démontrer que f', f'', f''', $f^{(4)}$ ont respectivement 5, 4, 3, 2 racines réelles.

Solution

Il est clair que f admet 6 racines :

$$x_1 = -2,\quad x_2 = -1,\quad x_3 = 0,\quad x_4 = 1,\quad x_5 = 2,\quad x_6 = 3.$$

Dans chacun des intervalles $[x_i, x_{i+1}]$ $1 \le i \le 5$, f vérifie les hypothèses du théorème de Rolle, donc il existe $c_i \in \,]x_i, x_{i+1}[$ $1 \le i \le 5$ tel que $f'(c_i) = 0$.
Ce qui montre que f' admet 5 racines.
Un raisonnement analogue, montre que f'', f''' et $f^{(4)}$ ont 4, 3, 2 racines réelles. ∎

4.13. Montrer que l'équation $e^x = 1 - x$ admet l'unique solution $x = 0$

Solution

$x = 0$ est bien solution de l'équation $e^x = 1 - x$.
Supposons qu'il existe une deuxième solution $x_0 \neq 0$. et considérons la fonction f définie par $f(x) = e^x - 1 + x$
f est continue, dérivable sur $\mathbb{R}$ donc en particulier sur $[0, x_0]$ si $x_0 > 0$ (ou $[x_0, 0]$ si $x_0 < 0$) et on a : $f(0) = f(x_0) = 0$.
Donc d'aprés le théorème de Rolle il existe $c \in \,]0, x_0[$ tel que :

$$f'(c) = 0 \quad \text{c'est à dire} \quad e^c = -1 \text{ ce qui est absurde.}$$ ∎

4.14. Montrer que l'équation $x - e^{-x} = 0$ admet une solution unique $x_0 \in \mathbb{R}$ et que $1/e < x_0 < 1$.

Solution

Posons $f(x) = x - e^{-x}$.
f est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = 1 + e^{-x}$, $f'(x) > 0$.
f est alors une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$. Il existe alors $x_0 \in \mathbb{R}$ unique tel que $f(x_0) = 0$
De plus $f(1) = 1 - 1/e > 0$ et $f(1/e) = 1/e - e^{-1/e} < 0$
D'où : $1/e < x_0 < 1$. ∎

4.15. Soit h un réel strictement positif. En appliquant le théorème des Accroissements finis sous la forme :

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = h\, f'(x_0 + \theta h) \quad \text{où } \theta \in \,]0, 1[$$

expliciter θ en fonction de h et étudier sa limite lorsque h tend vers 0 dans chacun des cas suivants :

a) $f(x) = 2x^2 + 3x + 1$, $x_0 \in \mathbb{R}$ b) $f(x) = \dfrac{1}{1+x}$ $x_0 \in \mathbb{R}^{*+}$

c) $f(x) = e^x$, $x_0 = 0$ d) $f(x) = 2 + \sqrt{x}$, $x_0 = 0$

Solution

Dans chacun de ces cas, f est continue sur $[x_0, x_0+h]$ et elle est dérivable sur $]x_0, x_0+h[$ donc il existe $\theta \in \,]0, 1[$ tel que : $f(x_0 + h) - f(x_0) = h\, f'(x_0+\theta h)$.

a) $2(x_0 + h)^2 + 3(x_0 + h) + 1 - (2x_0^2 + 3x_0 + 1) = h\,[4(x_0 + \theta h) + 3]$

donc après simplification il reste :

$$2h^2 = 4\theta h^2 \qquad \text{d'où : } \theta = 1/2$$

b) on a $\dfrac{1}{1 + x_0 + h} - \dfrac{1}{1 + x_0} = \dfrac{-h}{(1 + x_0 + \theta h)^2}$

donc : $(1 + x_0 + \theta h)^2 = (1 + x_0)(1 + x_0 + h)$.

qui nous donne une équation de second degré en θ.

$$\theta^2 h^2 + 2\theta h(1 + x_0) - h(1 + x_0) = 0.$$

donc $\theta = \dfrac{-(1 + x_0) + \sqrt{(1 + x_0)(1 + x_0 + h)}}{h}$ (on a rejeté la solution négative)

et $\lim\limits_{h\to 0} \theta(h) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{(1 + x_0)}{\sqrt{(1 + x_0)(1 + x_0 + h)} + (1 + x_0)} = \dfrac{1}{2}$

c) on a $e^{x_0 + h} - e^{x_0} = h \,.\, e^{x_0 + \theta h}$
ce qui conduit à :

$$\frac{e^h - 1}{h} = e^{\theta h} \qquad \text{d'où} \qquad \theta(h) = \frac{1}{h} \operatorname{Log}\left(\frac{e^h - 1}{h}\right)$$

Etudions $\lim\limits_{h \to 0} \theta(h)$:

Par applications successives de la règle de l'Hôpital (cf l'exercice 18 / ch IV).
On trouve

$$\lim_{h \to 0} \theta(h) = \frac{1}{2}$$

d) on a $f(x_0 + h) - f(x_0) = h\, f'(x_0 + \theta h)$.

or $\quad f'(x_0+\theta h) = \dfrac{1}{2\sqrt{x_0+\theta h)}}$

donc $\quad \sqrt{x_0+h} - \sqrt{x_0} = \dfrac{h}{2\sqrt{x_0+\theta h}} \qquad x_0 = 0.$

D'où : $\quad \sqrt{h} = \dfrac{h}{2\sqrt{\theta h}}$ ce qui donne $\quad \theta = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ ■

4.16. Démontrer les inégalités suivantes :

a) $\sin x \leq x$ si $x \geq 0$.

b) $\log(1+x) \leq x$ si $x \geq 0$.

c) $\operatorname{Arctg} x \leq x$ si $x \geq 0$.

d) $\operatorname{Arcsin} x < \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ si $0 < x < 1$.

e) $x < \operatorname{tg} x$ et $x + \dfrac{x^3}{3} < \operatorname{tg} x$ si $x \in \left]0, \pi/2\right[$

Solution

a) La fonction $t \to \sin t$ est continue sur $[0, x]$ et dérivable sur $]0, x[$ pour tout $x > 0$. Donc d'aprés le théorème des Accroissements finis il existe $c \in]0, x[$ tel que : $\quad \sin x = x \cos c$

or $\quad 0 \leq \cos c \leq 1 \quad$ d'où $\quad \sin x \leq x \quad \forall\, x > 0.$

L'inégalité est évidemment satisfaite si $x = 0$.

b) On applique le théorème des Accroissements finis à la fonction $t \to \log(1+t)$ sur l'intervalle $[0, x]$ on a :

$$\log(1+x) = \frac{x}{1+c} < 1 \quad \text{or} \quad \frac{1}{1+c} < 1 \quad \text{d'où le résultat.}$$

c) En raisonnant de la même manière qu'en a) et b) il vient :

$$\operatorname{Arctg} x = \frac{x}{1+c^2} \qquad \text{mais} \qquad \frac{1}{1+c^2} < 1.$$

d) même démonstration que precédement.

e) En appliquant le théorème de Accroissements finis à la fonction $t \to \operatorname{tg} t$ sur $[0, x]$ puis à la fonction $t \to \operatorname{tg} t - (t + t^3/3)$ sur $[0, x]$. ■

4.17. Démontrer que : $\forall\,(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tels que $0 < a < b$ on a :

$$\frac{b-a}{b} < \log\frac{b}{a} < \frac{b-a}{a}$$

Solution

La fonction $t \to \log t$ est définie, continue sur $[a, b]$ pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $0 < a < b$ et elle est dérivable sur $]a, b[$.

Donc d'aprés le théorème des Accroissements finis il existe $c \in]a, b[$ tel que :

$$\log b - \log a = (b - a) \cdot 1/c$$

or $a < c < b$ donc $1/b < 1/c < 1/a$.

D'où : $\dfrac{b-a}{b} < \log \dfrac{b}{a} < \dfrac{b-a}{a}$ ■

4.18. Démontrer que : $\forall\, (a, b) \in \mathbb{R}^2$ vérifiant : $0 < a \leq b < \pi/2$. On a :

$$\frac{b-a}{\cos^2 a} \leq \operatorname{tg} b - \operatorname{tg} a \leq \frac{b-a}{\cos^2 b}$$

Solution

Le théorème des Accroissements finis appliqué à la fonction $t \to \operatorname{tg} t$ sur $[a, b]$

$$\forall\, (a, b) \in \mathbb{R}^2 \;:\; 0 < a \leq b < \pi/2.$$

donne : $\operatorname{tg} b - \operatorname{tg} a = \dfrac{b-a}{\cos^2 c}$ où $c \in]a, b[$.

Mais la fonction cosinus est décroissante sur $[0, \pi/2]$ donc :

$$\cos^2 b < \cos^2 c < \cos^2 a.$$

D'où : $\dfrac{b-a}{\cos^2 a} < \operatorname{tg} b - \operatorname{tg} a < \dfrac{b-a}{\cos^2 b}$ ■

4.19. On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x - \cos x$.

1°) Montrer que l'équation $[x - \cos x = 0]$ admet une solution x_0 dans $[\pi/6, \pi/4]$.

2°) Montrer qu'il existe $c \in]x_0, \pi/4[$ tel que : $\dfrac{\pi - 2\sqrt{2}}{\pi - 4x_0} = f'(c)$.

Solution

1°) La fonction f est définie et continue sur l'intervalle

$[\pi/6, \pi/4]$ et $f(\pi/6) \cdot f(\pi/4) = \left(\dfrac{\pi}{6} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\dfrac{\pi}{4} - \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) < 0$

D'après le théroème des valeurs intermédiaires, il existe une valeur x_0, comprise strictement entre $\pi/6$ et $\pi/4$, telle que $f(x_0) = 0$. C'est à dire x_0 est solution de l'équation $[x - \cos x = 0]$.

2°) f est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$. En particulier elle est définie et continue sur $[x_0, \pi/4]$ et dérivable sur $]x_0, \pi/4[$. Ainsi, elle vérifie les hypothèses du théorème des accroissement finis.

D'où : $f(\pi/4) - f(x_o) = \left(\frac{\pi}{4} - x_o\right) f'(c)$

Ce qui se traduit par : $\exists\, c \in \left]x_o, \frac{\pi}{4}\right[\quad : \quad \frac{\pi - 2\sqrt{2}}{\pi - 4x_o} = f'(c)$.

Ceci provient du fait que $f(x_o) = 0$ et que $x_o \neq \pi/4$. ■

4.20. En utilisant la régle de l'Hospital , calculer les limites :

1) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1 - \cos x^2}{x^4}$ 2) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1 - \cos x^2}{x^3 \sin x}$ 3) $\lim\limits_{x \to \pi/2} \frac{\log(\sin x)}{(\pi - 2x)^2}$

Solution

1) On applique la régle de l'Hospital au rapport $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{1 - \cos x^2}{x^4}$ puisque les fonctions f et g sont définies, continues et dérivables dans un voisinage de 0 et on a : $\frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{2x \sin x^2}{4x^3} = \frac{\sin x^2}{2x^2}$

or $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x^2}{2x^2} = \frac{1}{2}$ donc $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1 - \cos x^2}{x^4} = \frac{1}{2}$

2) $\frac{1 - \cos x^2}{x^3 \sin x} = \frac{1 - \cos^2}{x^4} \cdot \frac{x}{\sin x}$ Donc $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1 - \cos x^2}{x^3 \sin x} = \frac{1}{2}$ (d'aprés a).

3) Posons $f(x) = \log(\sin x)$ et $g(x) = (\pi - 2x)^2$

f et g sont deux fonctions définies, continues et dérivables dans un voisinage de $\pi/2$ et on a :

$$f'(x) = \frac{\cos x}{\sin x} \quad \text{et} \quad g'(x) = -4(\pi - 2x).$$

D'où $\frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{-1}{4 \sin x} \cdot \frac{\cos x}{\pi - 2x}$ qui conduit à une indétermination.

Une deuxième application de la régle de l'Hospital à $\frac{\cos x}{\pi - 2x}$ donne :

$$\lim_{x \to \pi/2} \frac{\cos x}{\pi - 2x} = \lim_{x \to \pi/2} \frac{-\sin x}{-2} = \frac{1}{2}$$

D'où $\lim\limits_{x \to \pi/2} \frac{f'(x)}{g'(x)} = -\frac{1}{8}$ et par conséquent : $\lim\limits_{x \to \pi/2} \frac{f(x)}{g(x)} = -\frac{1}{8}$ ■

4.21. En utilisant la régle de l'Hospital calculer les limites .

1) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\log \operatorname{tg} 7x}{\log \operatorname{tg} 2x}$ 2) $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{sh^2 x - sh^2 a}{x^2 - a^2}$ 3) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{x} \cdot \log\left(\dfrac{e^x - 1}{x}\right)$

Solution

1) Un calcul directe de la limite , montre qu'on a une indetermination.

Appliquons donc la régle de l'Hospital à $\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\log(\operatorname{tg} 7x)}{\log(\operatorname{tg} 2x)}$. f et g sont définies, continues et dérivables sur tout intervalle de la forme] o , a [et on a :

$$f'(x) = \frac{7(1 + \operatorname{tg}^2 7x)}{\operatorname{tg} 7x} \quad \text{et} \quad g'(x) = \frac{2(1 + \operatorname{tg}^2 2x)}{\operatorname{tg} 2x}$$

donc $\dfrac{f'(x)}{g'(x)} = \dfrac{7(1 + \operatorname{tg}^2 7x)}{2(1 + \operatorname{tg}^2 2x)} \cdot \dfrac{\operatorname{tg} 2x}{\operatorname{tg} 7x}$ qui conduit, encore , à une forme indéterminée.

Appliquons la régle de l'Hospital à $\dfrac{\operatorname{tg} 2x}{\operatorname{tg} 7x}$. tg 2x et tg 7x vérifient les hypothèses de l'Hospital et on a :

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{tg} 2x}{\operatorname{tg} 7x} = \lim_{x \to 0} \frac{2(1 + \operatorname{tg}^2 2x)}{7(1 + \operatorname{tg}^2 7x)} = \frac{2}{7}$$

or $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{7(1 + \operatorname{tg}^2 7x)}{2(1 + \operatorname{tg}^2 2x)} = \dfrac{7}{2}$ D'où $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = 1$

Finalement : $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1.$

2) on suppose que $a \neq 0$ (sinon $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{sh^2 x}{x^2} = \lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{shx}{x}\right)^2 = 1$)

En posant $f(x) = sh^2 x - sh^2 a$ et $g(x) = x^2 - a^2$

on a $\dfrac{f'(x)}{g'(x)} = \dfrac{2shx\, chx}{2x}$ et $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = \dfrac{sh\, 2a}{2a}$

D'où $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x \to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = \dfrac{sh\, 2a}{2a}$

3) Calculons : $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{x} \log\left(\dfrac{e^x - 1}{x}\right)$

Posons $f_1(x) = \log\left(\dfrac{e^x - 1}{x}\right)$ et $g_1 = x$. Donc $\dfrac{f_1'(x)}{g_1'(x)} = \dfrac{x e^x - e^x + 1}{x(e^x - 1)}$

et $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f_1'(x)}{g_1'(x)}$ présente une forme indéterminée

posons $f_2(x) = xe^x - e^x + 1$ et $g_2(x) = x(e^x - 1)$ et appliquons une deuxième fois la règle de l'Hospital à $f_2(x) / g_2(x)$:

$f_2'(x) = x e^x$ et $g_2'(x) = e^x + xe^x - 1$ et $\lim\limits_{x \to 0} \frac{f_2'(x)}{g_2'(x)}$ conduit également à une forme indétérminée.

Une troisième application de la régle de l'Hospital donne :

$$\lim_{x \to 0} \frac{f_2''(x)}{g_2''(x)} = \lim_{x \to 0} \frac{e^x + xe^x}{e^x + e^x + xe^x} = \frac{1}{2}$$

D'où : $\lim\limits_{x \to 0} \frac{f_1(x)}{g_1(x)} = \frac{1}{2}$ ■

4.22. Utilisant le développement de Mac laurin de la fonction $f(x) = \log(1 + x)$

Déterminer la limite de la suite de terme général $U_n = 1 - 1/2 + 1/3 + \ldots + (-1)^{n-1} 1/n$ lorsque n tend vers $+\infty$

Solution

$f'(x) = (1 + x)^{-1}$ $f''(x) = -1(1 + x)^{-2}$ $f'''(x) = 2(1 + x)^{-3}$

f est de classe C^∞ sur $]-1, +\infty[$ et $f^{(n)} = (-1)^{n-1}(n - 1)!\,(1 + x)^{-n}$. Ce qui nous permet de calculer : $\frac{f^{(n)}(0)}{n!} = \frac{(-1)^{n-1}}{n}$

Pour tout $x \in]-1, +\infty[$:

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \ldots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{(n+1)(1+c)^{n+1}}$$

avec $c = \theta x$, $\theta \in]0, 1[$

pour $x = 1$ on a :

$$\log 2 = U_n + R_n \quad \text{où} \quad R_n = \frac{(-1)^n}{(n+1)(1+\theta)^{n+1}} \quad ; \quad |R_n| < \frac{1}{n+1}$$

$\lim\limits_{n \to +\infty} R_n = 0$ Par conséquent : $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = \log 2$ ■

4.23. Etablir les inégalités suivantes :

a - $x - \frac{x^2}{2} \leq \log(1+x) \leq x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$ pour $x \geq 0$

b - $1 - \frac{x^2}{2} \leq \cos x \leq 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$

Solution

a) La double inégalité est vérifiée si $x = 0$. Supposons $x > 0$

La formule de Mac Laurin à l'ordre 2 appliquée à $f(x) = \log(1 + x)$ donne :

$$f(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3(1+\theta x)^3} \quad , \quad \theta \in]0, 1[$$

puisque $x > 0$, on a : $0 < \dfrac{x^3}{3(1+\theta x)^3} < \dfrac{x^3}{3}$

Finalement : $x - \dfrac{x^2}{2} < \log(1+x) < x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3}$ pour tout $x > 0$.

b) Appliquons la formule de Mac Laurin à la fonction cosinus :

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} \cos \theta_1 x$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} \cos \theta_2 x \quad \text{avec} \quad \theta_1 , \theta_2 \in]0, 1[$$

On déduit alors le résultat à partir des inégalités

$$-\frac{x^2}{2} \leq -\frac{x^2}{2} \cos \theta_1 x \qquad \text{et} \qquad \frac{x^4}{24} \cos \theta_2 x \leq \frac{x^4}{24}$$

■

4.24. Soient $x_0 \in \mathbb{R}$, $\varepsilon \in \mathbb{R}^*_+$ et f une fonction de classe C^{n+1} sur l'intervalle $[x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon]$, telle que $f^{(n+1)}(x_0) \neq 0$.

Montrer que le réel $\theta_n(h)$ défini par la formule de Taylor

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + \frac{h}{1!} f'(x_0) + \ldots + \frac{h^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(x_0) + \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(a + h\,\theta_n(h))$$

vérifie : $$\lim_{h \to 0} \theta_n(h) = \frac{1}{n+1}$$

Solution

Ecrivons la formule de Taylor à l'ordre au dessus :

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + \frac{h}{1!} f'(x_0) + \ldots + \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(x_0) + \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(a + h\theta_{n+1}(h))$$

En comparant ces deux expressions on obtient :

$$\frac{h^n}{n!} f^{(n)}(x_0 + h\theta_n(h)) = \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(x_0) + \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(a + h\theta_{n+1}(h))$$

$$f^{(n)}(x_0 + h_{\theta n}(h) - f^{(n)}(x_0) = \frac{h}{n+1} f^{(n+1)}(a + h\theta_{n+1}(h))$$

Le théorème des accroissements finis appliqué à $f^{(n)}$ entre x_0 et $x_0 + h\theta_n(h)$.
nous permet d'écrire :

$$f^{(n)}(x_0+h\theta_n(h)) - f^{(n)}(x_0) = h\theta_n(h)\, f^{(n+1)}(x_0 + h\lambda\theta_n(h))$$

d'où
$$\theta_n(h) = \frac{1}{n+1}\,\frac{f^{(n+1)}(x_0 + h\theta_{n+1}(h))}{f^{(n+1)}(x_0 + h\lambda\theta_n(h))}$$

Puisque $f^{(n+1)}(x_0) \neq 0$ et $f^{(n+1)}$ continue, $f^{(n+1)}(x_0+h\theta_n(h))$ et $f^{(n+1)}(x_0 + h\lambda\theta_n(h))$ sont non nuls pour h suffisamment proche de 0 et tendent vers $f^{(n+1)}(x_0)$ quand h tend vers 0. ■

Ce qui montre le résultat.

4.25. Soit P un polynôme de degré n et x_0 un réel. Développer suivant les puissances de $(x - x_0)$ le polynôme P.

Solution

La fonction polynôme P est indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$.

Appelons $P^{(k)}$ sa dérivée $k^{ième}$. Le développement de Taylor à l'ordre de P(x) au voisinage de x_0 est donné par :

$$P(x) = P(x_0) + \frac{P'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{P''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots + \frac{P^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \frac{P^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$$

or $P^{(k)} = 0$ si $k > n$. Ainsi le développement recherché est le suivant :

$$P(x) = P(x_0) + \frac{P(x_0)}{1!}(x - x_0) + \ldots + \frac{P^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$ ■

4.26. Développer le polynôme $P(x) = x^4 - 5x^3 + 5x^2 + x + 2$ suivant les puissances de $(x - 2)$

Solution

$P(x) = x^4 - 5x^3 + 5x^2 + x + 2 \quad \rightarrow \quad P(2) = 0$

$P'(x) = 4x^3 - 15x^2 + 10x + 1 \quad \rightarrow \quad P'(2) = -7$

$P''(x) = 12x^2 - 30x + 10 \quad \rightarrow \quad P''(2) = -2$

$P'''(x) = 24x - 30 \quad \rightarrow \quad P'''(2) = 18$

$P^{(4)}(x = 24 \quad \rightarrow \quad P^{(4)}(2) = 24$

$P^{(5)}(x) = 0$

On applique alors la formule de Taylor avec reste de Lagrange, à l'ordre 4:

$$P(x) = P(2) + \frac{(x-2)^1}{1!}P'(2) + \frac{(x-2)^2}{2!}P''(2) + \frac{(x-2)^3}{3!}P'''(2) + \frac{(x-2)^4}{4!}P^{(4)}(2) + \frac{(x-2)^5}{5!}P^{(5)}(c)$$

Or pour tout $x \in \mathbb{R}$ $\quad P^{(5)}(x) = 0$, donc , aprés simplifications :

$$P(x) = -7 (x - 2) - (x - 2)^2 + 3 (x - 2)^3 + (x - 2)^4.$$

■

4.27. Utilisant la formule de Taylor à l'ordre 2, donner une valeur approchée de cos63°. Estimer l'erreur due à cette approximation.

Solution

La formule de Taylor à l'ordre 2 au voisinage de x_0 est :

$$\cos x = \cos x_0 - \frac{\sin x_0}{1!}(x - x_0) - \frac{\cos x_0}{2!}(x - x_0)^2 + \frac{\sin c}{3!}(x - x_0)^3$$

où $c = x_0 + \theta (x - x_0)$ avec $\theta \in \,]0,1[$

En posant $x = 63°$ $\quad x_0 = 60°$.

La formule ci-dessus n'est valable que si x et x_0 sont exprimés en radian.

$$x_0 = \frac{\pi}{3} \qquad x = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{60}. \text{ Ainsi}$$

$$\cos 63° = \cos\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{60}\right) = \cos\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{60}\sin\frac{\pi}{3} - \frac{\pi^2}{60^2}\,\frac{\cos \pi/3}{2} + \varepsilon$$

$$\text{avec} \quad \varepsilon = \frac{\pi^3}{6.60^3}\sin c.$$

Finalement $\cos 63° \approx 0,45399$ où l'erreur d'approximation en valeur absolue est :

$$|\varepsilon| \leq 2,5\ 10^{-5}$$

■

4.28. Donner une valeur approchée de e à 10^{-5} près, sachant que $e < 3$.

Solution

La formule de Mac Laurin appliquée à la fonction $f(x) = e^x$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}e^{\theta x} \qquad \text{avec } \theta \in \,]0, 1[$$

car $f^{(k)} = e^x$ en particulier $f^{(k)}(0) = 1$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

pour $x = 1$,

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!} + \frac{e^{\theta}}{(n+1)!}$$

Posons $R_n = \dfrac{e^{\theta}}{(n+1)!}$ $\quad$ on a : $|R_n| < \dfrac{e}{(n+1)!} < \dfrac{3}{(n+1)!}$

Or $\dfrac{3}{8!} = 7,4\ 10^{-5}$ et $\dfrac{3}{9!} = 0,8210^{-5}$ il faut donc prendre $n = 8$ pour avoir $|R_n| < 10^{-5}$. on a alors :

$$e \approx \sum_{k=0}^{8} \frac{1}{k!} \quad \text{soit } e \approx 2,71828 \quad \text{avec une erreur inférieure à } 10^{-5}$$

■

FONCTIONS USUELLES

5.1

> Démontrer les égalités
>
> 1) $\text{Arc}\sin x + \text{Arc}\cos x = \pi/2 \qquad \forall x \in [-1, 1].$
>
> 2) $\text{Arc}\sin x + \text{Arcsin}\sqrt{1-x^2} = \pi/2 \qquad \forall x \in [0,1].$

Solution

1) **1$^{\text{ére}}$ méthode**:

pour tout $x \in [-1,1]$, posons : $\alpha = \text{Arc}\sin x$ et $\beta = \text{Arc}\cos x$.

Par définition : $\alpha \in [-\pi/2, \pi/2]$ et $\beta \in [0, \pi]$ donc $(\pi/2 - \beta) \in [-\pi/2, \pi/2]$

On a : $\sin\alpha = x$ et $\sin(\pi/2 - \beta) = \cos\beta = x$.

D'où $\sin\alpha = \sin(\pi/2 - \beta)$.

Or la fonction sinus est une bijection de $[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ sur $[-1,1]$

donc $\alpha = \pi/2 - \beta$. C'est à dire $\alpha + \beta = \pi/2$.

et par suite : $\text{Arc}\sin x + \text{Arc}\cos x = \pi/2$.

2éme méthode:

Considérons la fonction définie sur $[-1, 1]$ par : $f(x) = \text{Arc}\sin x + \text{Arc}\cos x$.

f est dérivable sur $]-1, 1[$ et $f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}} = 0.$

Donc f est constante sur $]-1, 1[$. En prenant $x = 0$. On trouve la cor ;tante égale à $\pi/2$. Et par continuité : $f(-1) = f(1) = \pi/2$. D'où :

$\forall x \in [-1,1] \qquad f(x) = \text{Arc}\sin x + \text{Arc}\cos x = \pi/2.$

2) Fn utilisant la 2ème méthode :

soit $f(x) = \text{Arc}\sin x + \text{Arc}\sin\sqrt{1-x^2}$

f est définie sur $[-1, 1]$ et dérivable sur $]-1, 1[$ et on a :

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{\sqrt{1-(1-x^2)}} \cdot \frac{-2}{2\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{-x}{\sqrt{x^2} \cdot \sqrt{1-x^2}}$$

Pour $x \in [0, 1[$ $f'(x) = 0$, donc f est constante sur $[0, 1[$. En prenant $x = 0$ on trouve la constante égale à $\pi/2$. Et par continuité $f(1) = \pi/2$.

D'où : $\forall x \in [0, 1]$ $\text{Arc sin}x + \text{Arc sin}\sqrt{1-x^2} = \pi/2$.

■

Exercices proposés :

Démontrer les égalités :

1) $\forall x \in \mathbb{R}^*_+$ $\quad$ $\text{Arc tg}x + \text{Arc tg}1/x = \pi/2$. Que peut-on dire pour $x < 0$?

2) $\forall x \in \mathbb{R}$ $\quad$ $\sin \text{Arc tg}x = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

3) $\forall x \in \mathbb{R}$ $\quad$ $\cos \text{Arc tg}x = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

5.2 Simplifier les expressions suivantes :

1) $A(x) = \text{Arc cos}\,(1-2x^2)$ $\qquad$ 2) $B(x) = \text{Arc tg}\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$

Solution

1) $A(x)$ est définie sur $[-1, 1]$. On vérifie facilement que :

$$[-1 \leq 1 - 2x^2 \leq 1] \quad \Leftrightarrow \quad x \in [-1, 1].$$

Posons alors $x = \sin\alpha$ pour $\alpha \in [-\pi/2, \pi/2]$. Ce qui donne :

$$1 - 2x^2 = (1 - \sin^2\alpha) - \sin^2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = \cos 2\alpha$$

d'où $A(x) = \text{Arc cos}(\cos 2\alpha)$.

Par suite $\quad A(x) = 2\alpha \quad$ si $\quad \alpha \in [0, \pi/2]$.

et $\quad A(x) = -2\alpha \quad$ si $\quad \alpha \in [-\pi/2, 0]$.

Comme $\alpha = \text{Arc sin}x$, on obtient :

$\text{Arc cos}\,(1 - 2x^2) = 2\,\text{Arc sin}x \quad$ si $\quad x \in [0, 1]$.

$\qquad = -2\,\text{Arc sin}x \quad$ si $\quad x \in [-1, 0]$.

Expression qu'on peut simplifier encore en écrivant :

$\text{Arc cos}\,(1 - 2x^2) = 2\,|\text{Arc sin}x|$ $\quad$ pour tout $x \in [-1, 1]$.

2) $B(x)$ est définie sur $]-1, 1]$.

La racine étant positive, posons $\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}} = \text{tg}\varphi$ $\quad$ avec $\varphi \in [0,\pi/2[$

Ce qui donne , aprés simplifications : $x = \dfrac{1 - \text{tg}^2\varphi}{1 + \text{tg}^2\varphi} = \cos 2\varphi$

Comme $\varphi \in [0, \pi/2[$, $2\varphi \in [0, \pi[$. La fonction cosinus étant une bijection de $[0, \pi]$ sur $[-1, 1]$, on a : $\varphi = 1/2 \text{ Arc cos} x$.

Finalement pour tout $x \in \,]-1, 1]$: $\text{Arc tg} \sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}} = 1/2 \text{ Arc cos} x$. ■

Exercices proposés :

Simplifier les expressions suivantes :

1) $A_1(x) = \text{Arc sin}(2\sin x \cos x)$

2) $A_2(x) = \text{Arc cos} \dfrac{1-x^2}{1+x^2}$

3) $A_3(x) = \text{Arc tg}(\sqrt{1+x^2} - x)$

4) $A_4(x) = \text{Arc tg} \sqrt{\dfrac{1-\cos x}{1+\cos x}}$.

5.3 Résoudre l'équation :

$$\text{Arc sin} 2x - \text{Arc sin}\, x\sqrt{3} = \text{Arc sin} x.$$

Solution

On peut reécrire cette équation sous la forme:

$$\text{Arc sin}\, 2x = \text{Arc sin}\, x\sqrt{3} + \text{Arc sin}\, x \qquad (1)$$

Cette équation est définie pour $x \in [-1/2, 1/2]$. D'autre part, nous savons que pour tout $t \in [-1, 1]$: $\cos(\text{Arc sin} t) \sqrt{1-t^2}$

(puisque $\text{Arc sin} t \in [-\pi/2, \pi/2]$ donc son cosinus est positif).

Maintenant, en prenant le sinus des deux membres dans l'équation (1) , il vient:

$$2x = x\sqrt{3} \cdot \sqrt{1-x^2} + x\sqrt{1-3x^2} \quad . \qquad (2)$$

$x = 0$ est évidemment solution de l'équation (2).

Pour $x \neq 0$, l'équation (2) devient :

$$2 = \sqrt{3-3x^2} + \sqrt{1-3x^2} \quad \text{d'où} \quad 2 - \sqrt{3-3x^2} = \sqrt{1-3x^2}\,.$$

En élevant au carré les 2 membres et aprés simpliffication on trouve:

$$\frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{1-x^2}$$

En élevant de nouveau au carré et après simplification on trouve :

$x^2 = 1/4$. Ce qui donne $x = \pm 1/2$.

Finalement l'ensemble des solutions est : $S = \{-1/2, 0, 1/2\}$.

■

Exercices proposés :

1) $2 \text{ Arc tg}(\sqrt{1+x^2} - x) + \text{Arc tg} x = \pi/2$

2) $\text{Arc tg}(x-1) + \text{Arc tg}(x+1) = \pi/2 - \text{Arc tg} x$

5.4 Discuter suivant les valeurs des réels a, b , c, l'existence de solutions de l'équation : $a \cos x + b \sin x = c.$ (1)

Solution

Si $a = b = 0$ l'équation se réduit à $0 = c$ qui admet $\mathbb{R}$ ou $\emptyset$ pour ensemble de solutions.

Supposons donc que $a \neq 0$ ou $b \neq 0$.

Posons $\alpha = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $\beta = \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$ et $\gamma = \dfrac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$

L'équation (1) devient : $\alpha . \cos x + \beta \sin x = \gamma$ (2)

Avec $\alpha^2 + \beta^2 = 1$

Il existe donc $\theta_0 \in [0, 2\pi]$ tel que $\alpha = \sin \theta_0$ et $\beta = \cos \theta_0$.

L'équation (2) devient :

$$\sin (x + \theta_0) = \gamma. \tag{3}$$

1er cas : si $|\gamma| > 1$ l'équation (3) n'admet pas de solution : $S = \emptyset$.

2éme cas : si $|\gamma| \leq 1$, il existe $\theta_1 \in [0, 2\pi[$ tel que : $\gamma = \sin \theta_1$.

Et par conséquent l'équation (3) devient : $\sin (x + \theta_0) = \sin \theta_1$.

Ce qui donne $\begin{cases} x + \theta_0 = \theta_1 + 2k\pi \\ \text{ou } x + \theta_0 = \pi - \theta_1 + 2k\pi \end{cases}$ $k \in \mathbb{Z}$

Et par suite : $\begin{cases} x = (\theta_1 - \theta_0) + 2k\pi \\ \text{ou } x = \pi - (\theta_1 + \theta_0) + 2k\pi . \end{cases}$ $k \in \mathbb{Z}$. ■

Exercices proposés :

Résoudre les équations :

1) $\sqrt{3}.\cos x - \sin x = 1$
2) $\sin x - \cos x = 1$

5.5 Discuter suivant les valeurs des réels a, b , c , l'existence de solutions de l'équation : $a \operatorname{ch} x + b \operatorname{sh} x = c$ (1).

Solution

D'abord si $a = b = 0$, l'équation se réduit $0 = c$ qui admet $\mathbb{R}$ ou $\emptyset$ pour ensemble de solutions.

Supposons donc que $a \neq 0$ ou $b \neq 0$. Nous allons distinguer 3 cas possibles :

1er cas : si | a | = | b | ≠ 0.
En simplifiant par | a |, l'équation (1) devient :

$$\text{ch}x \pm \text{sh}x = c' \text{. ou encore} \qquad e^{\varepsilon x} = c' \quad \text{où } \varepsilon = \pm 1$$

Cette dernière équation admet une solution unique si $c' > 0$ et n'admet pas de solution si $c' \leq 0$.

2ème cas si | a | > | b |

Posons $\alpha = \dfrac{a}{\sqrt{a^2 - b^2}}$, $\beta = \dfrac{b}{\sqrt{a^2 - b^2}}$ et $\gamma = \dfrac{c}{\sqrt{a^2 - b^2}}$

L'équation (1) devient : $\alpha \,\text{ch}x + \beta \,\text{sh}x = \gamma$. (2)

avec $\alpha^2 - \beta^2 = 1$.

Ainsi, le point $M(\alpha, \beta)$ appartient à l'hyperbole équilatère d'équation $X^2 - Y^2 = 1$.

Donc il existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que : $\alpha = \text{ch}x_0$ et $\beta = \text{sh}x_0$.

Par suite, l'équation (2) devient : $\text{ch}(x + x_0) = \gamma$. (3)

Si $\gamma < 1$ l'équation (3) n'admet pas de solution.

Si $\gamma = 1$ l'équation (3) admet une solution unique : $x = -x_0$.

Si $\gamma > 1$ l'équation (3) admet deux solutions puisqu'il existe $x_1 \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\text{ch}\, x_1 = \gamma .$$

Par conséquent l'équation (3) s'écrit : $\text{ch}(x + x_0) = \text{ch}x_1$.

Donc : $\begin{cases} x + x_0 = x_1 \\ \text{ou} \quad x + x_0 = -x_1 \end{cases}$ d'où $\begin{cases} x = x_1 - x_0 \\ \text{ou} \quad x = -x_1 - x_0 \end{cases}$

3ème cas : si | b | > | a |.

Posons $\alpha = \dfrac{a}{\sqrt{b^2 - a^2}}$, $\beta = \dfrac{b}{\sqrt{b^2 - a^2}}$ et $\gamma = \dfrac{c}{\sqrt{b^2 - a^2}}$

L'équation (1) devient : $\beta.\text{sh}x + \alpha \,\text{ch}x = \gamma$. (2')

Avec $\beta^2 - \alpha^2 = 1$.

Il existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que : $\beta = \text{ch}x_0$ et $\alpha = \text{sh}x_0$.

Par suite l'équation (2') devient : $\text{sh}(x + x_0) = \gamma$. (3)

Or la fonction sh est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$, donc pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, il existe un unique réel x_1 tel que : $\text{sh}x_1 = \gamma$.

Par conséquent l'équation (3) admet une solution unique : $x = x_1 - x_0$. ■

Exercice proposé :
Résoudre l'équation : $3\,\text{ch}x + 2\text{sh}x = 4$.

5.6 Résoudre le système : $\begin{cases} \text{Arg sh}y = 2 \,\text{Arg sh}x \\ \text{Arg ch}y = 3\,\text{Arg ch}x \end{cases}$

Solution

Le système est défini sur $D = [1, +\infty[\times [1, +\infty[$.
En utilisant les formules : $sh2t = 2sht\, cht$ et $cht = \sqrt{sh^2t + 1}$
et en prenant le sh des deux membres, la première équation du système devient :

$$y = 2x\sqrt{x^2 + 1} \qquad (1)$$

Puis en calculant ch3t en fonction de cht uniquement, on trouve : $ch3t = 4ch^3t - 3cht$
Ce qui donne, en prenant le ch des deux membres de la seconde équation :

$$y = 4x^3 - 3x \qquad (2)$$

Les relations (1) et (2) entraînent :

$$2x\sqrt{x^2 + 1} = 4x^3 - 3x \qquad (E)$$

On cherche alors les solutions de (E) pour des $x \geq 1$. (donc $x \neq 0$). ce qui donne :

$2x\sqrt{x^2 + 1} = 4x^2 - 3$ ou encore : $16x^4 - 28x^2 + 5 = 0$.

En posant $x^2 = X$ il s'en suit :

$$X_1 = \frac{7+\sqrt{29}}{8} \quad \text{ou} \quad X_2 = \frac{7-\sqrt{29}}{8}$$

Seule la racine supérieure à 1 convient . c'est à dire :

$$x^2 = \frac{7+\sqrt{29}}{8} \quad \text{ou encore} \quad x = \sqrt{\frac{7+\sqrt{29}}{8}}$$

Par conséquent :

$$S = \left\{\left(\sqrt{\frac{7+\sqrt{29}}{8}}\ ,\ sh2\sqrt{\frac{7+\sqrt{29}}{8}}\right)\right\}$$

■

5.7 Soit f la fonction définie sur]0,1[par : $f(x) = x^2(x-1) \cdot \log\left(\frac{x}{1-x}\right)$

a) f est- elle prolongeable par continuité à l'intervalle [0, 1] ?
b) Si oui, étudier les tangentes à la courbe de la fonction prolongée en 0 et en 1.

Solution

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} (x-1) \cdot [\, x^2\log x - x^2.\log(1-x)\,] = 0.$$

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} x^2 [\,(x-1)\log x + (1-x)\log(1-x)\,] = 0.$$

Donc f est prolongeable par continuité aux points 0 et 1 en posant : $f(0) = f(1) = 0$.

Etude des tangentes :

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^+} x(x-1)\log\frac{x}{1-x} = 0$$

et $$\lim_{x \to 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1^-} x^2 \log\left(\frac{x}{1-x}\right) = -\infty$$

Par conséquent la courbe admet une demi tangente horizontale à droite de 0 et une demi-tangente verticale dirigée vers le haut, à gauche de 1. ■

5.8 Soit la fonction définie sur $R^*_+ \setminus \{1\}$ par : $f(x) = \dfrac{x^2 \log x}{x^2 - 1}$

a) f est- elle prolongeable par continuité au point 1 ?

b) Si oui , la fonction prolongée, notée f , est - elle dérivable au point 1 ?

Solution

a) $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = \lim\limits_{x \to 1} \left(\dfrac{x^2}{x+1}\right) \cdot \left(\dfrac{\log x - \log 1}{x - 1}\right) = \dfrac{1}{2}$

Donc f est prolongeable par continuité au point 1 en posant $f(1) = 1/2$.

b) x est au voisinage de 1 donc on pose $x = 1 + h$.

$$\frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \frac{1}{h} \cdot \left[\frac{(1+h)^2 \log(1+h)}{(2h + h^2)} - \frac{1}{2}\right].$$

$$= \frac{2(1 + 2h + h^2) \log(1+h) - (2h + h^2)}{2h(2h + h^2)}$$

Un développement limité de $\log(1 + h)$ au voisinage de 0, à l'ordre 2 donne, après simplifications :

$$\frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \frac{1 + \varepsilon(h)}{2(2+h)} \quad \text{qui tend vers } 1/4 \text{ quand } h \to 0.$$

Donc f est dérivable en 1 et $f'(1) = 1/4$. ■

5.9 Déterminer les asymptôtes éventuelles à la courbe, au voisinage de l'infini, de la fonction définie par $f(x) = \sqrt[3]{x^3 + 3x + 2}$

On précisera la position de la courbe par rapport à ces asymptôtes.

Solution

On effectue le changement de variable $t = 1/x$.

$$f(x) = x \cdot \sqrt[3]{1 + \frac{3}{x^2} + \frac{2}{x^3}} = \frac{1}{t} \cdot (1 + 3t^2 + 2t^3)^{1/3}.$$

t tend vers 0 lorsque x tend vers l'infini donc $(3t^2 + 2t^3) \to 0$.

On fait alors un développement limité au voisinage de 0 à l'ordre 1 de f (x) :

$f(x) = 1/t \,.\, [\, 1 + 1/3\,(3t^2 + 2t^3) + (3t^2 + 2t^3)\, \varepsilon_0(t)\,]$.

$= 1/t\, (\, 1 + t^2 + t^2 \varepsilon(t)\,) = 1/t + t + t\, \varepsilon(t)$.

$= x + 1/x + 1/x\, \varepsilon(1/x)$.

Ainsi la droite d'équation $y = x$ est asymptôte à la courbe vers $+\infty$ et vers $-\infty$.
La position de la courbe est précisée par le terme $1/x$. Donc :

. Au voisinage de $+\infty$, la courbe est située au dessus de l'asymptôte .
. Au voisinage de $-\infty$, la courbe est en dessous. ■

5.10 Dèterminer les asymptôtes éventuelles à la courbe au voisinage de l'infini de la fonction définie par :

$$f(x) = e^{1/x} . \sqrt{x(x+2)}$$

On précisera la position de la courbe par rapport aux asymptôtes.

Solution:

On effectue le changement de variable $t = 1/x$.

$$f(x) = |x|.e^{1/x}\sqrt{1+\frac{2}{x}} = \frac{e^t}{|t|}.(1+2t)^{1/2}$$

On fait alors un développement limité de cette expression, à l'ordre 2 au voisinage de 0 :

$$f(x) = \frac{1}{|t|}.(1+t+\frac{t^2}{2}+t^2\varepsilon_0(t))(1+t-\frac{t^2}{2}+t^2\varepsilon_1(1)).$$

$$= \frac{1}{|t|}.(1+2t+t^2+t^2\varepsilon(t)) \qquad \text{où } \varepsilon(t) \underset{t\to 0}{\to} 0$$

. Au voisinage de $+\infty$:

$$f(x) = \frac{1}{t}+2+t+t\,\varepsilon(t) = x+2+\frac{1}{x}+\frac{1}{x}\varepsilon(\frac{1}{x})$$

La droite d'équation $y = x + 2$ est asymptôte à la courbe vers $+\infty$.
La position de la courbe est précisée par le terme $3/2x$, donc la courbe est située au dessus de l'asymptôte vers $+\infty$.

. Au voisinage de $-\infty$.

$$f(x) = \frac{-1}{t}-2+|t|+t\,\varepsilon(t) = -x-2+\frac{1}{|x|}+\frac{1}{x}\varepsilon(1/x)$$

La droite d'équation $y = -x - 2$ est asymptôte à la courbe vers $-\infty$.

La position de la courbe est précisé par le terme $\frac{1}{|x|}$, donc la courbe est située au dessus de l'asymptôte vers ∞. ■

5.11 Etudier le sens de variation de la fonction définie par :

$$f(x) = \frac{\cos 2x + 1}{2\cos x - 1}$$

Tracer sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

Solution

1) Domaine de définition : Soit $x \in \mathbb{R}$.

$x \in D_f \iff \cos x \neq 1/2 \iff x \neq \pm\pi/3 + 2k\pi$

D'où $D_f = \mathbb{R} \setminus \{ \pm \pi/3 + 2k\pi \ / \ k \in \mathbb{Z} \}$.

2) f est périodique de période 2π donc on réduit le domaine d'étude à un intervalle de longueur 2π : $[-\pi , \pi] \cap D_f$.

D'autre part f est une fonction paire donc on réduit encore le domaine d'étude à $D_0 = [0,\pi] \cap D_f = [0, \pi/3[\cup]\pi/3, \pi]$

3) f est définie et continue en tout point de son domaine de définition et on a :
$\lim_{x \to \pi/3^-} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \to \pi/3^+} f(x) = -\infty$.

4) f est dérivable sur son domaine de définition et on a après simplification :

$$f\,(x) = \frac{2.\sin 2x\,(1 - \cos x)}{2\cos x - 1}$$

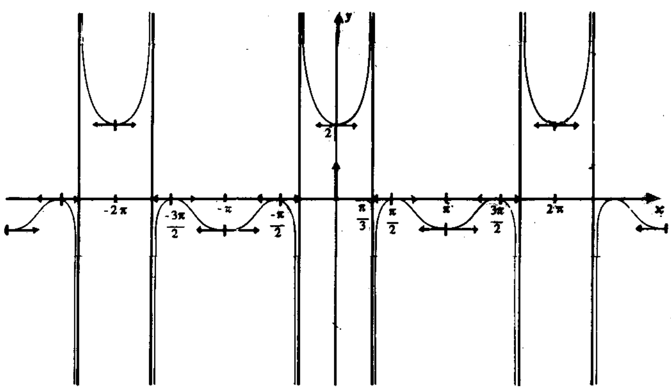
$f'(x) = 0$ et $x \in D_0 \iff \sin 2x = 0$ ou $\cos x = 1$.

$\iff x = 0$ ou $x\ \pi/2$ ou $x = \pi$.

Ce qui conduit au tableau de variations suivant :

5)

x	0		π/3		π/2		π
f '(x)	0	+	‖	+	0	-	0
f (x)	2	↗	+∞ ‖ -∞	↗	0	↘	-2/3



5.12 Etudier le sens de variation de la fonction définie par :

$$f(x) = \text{Arcsin}\,(2x\sqrt{1-x^2})$$

Tracer sa courbe représentative dans un repère orthonormé. (On précisera les tangentes aux points remarquables).

Solution

1) Domaine de définition . Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$x \in D_f \quad \Leftrightarrow \quad [-1 \leq x \leq 1] \quad \text{et} \quad [-1 \leq 2x\sqrt{1-x^2}) \leq 1].$$

Or, on remarque que la fonction f est impaire, donc il suffit de chercher l'ensemble des $x \in [0, 1]$ vérifiant la condition :

$$0 \leq 2x\sqrt{1-x^2} \leq 1 \qquad \text{soit} \quad 4x^2(1-x^2) \leq 1.$$

Ce qui donne $\quad -(2x^2-1) \leq 0.$

Condition réalisée pour tout $x \in [0, 1]$. Par suite $D_f = [-1, 1]$.

2) f est impaire, donc on réduit le domaine d'étude à $[0, 1]$.

On complètera la construction de la courbe par symétrie par rapport à l'origine O.

3) f est définie et continue sur $[-1, 1]$. Elle est dérivable en tout point $x \in [-1, 1]$ vérifiant les conditions :

$$1 - x^2 \neq 0 \qquad \text{et} \qquad 2x\sqrt{1-x^2} \neq \pm 1.$$

Ainsi le domaine de dérivabilité de f est :

$$D_{f'} = \left]-1, \frac{-1}{\sqrt{2}}\right[\cup \left]\frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right[\cup \left]\frac{1}{\sqrt{2}}, 1\right[$$

Calcul de la dérivée, pour tout $x \in D_{f'}$ on a :

$$f'(x) = \frac{2}{\sqrt{1-4x^2(1-x^2)}} \cdot \left(\sqrt{1-x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\right)$$

$$f'(x) = \frac{2(1-2x^2)}{|1-2x^2| \cdot \sqrt{1-x^2}}$$

Simplifions cette expression :

. Pour $x \in \left]-1, \frac{-1}{\sqrt{2}}\right[\qquad f'(x) = \frac{-2}{\sqrt{1-x^2}}.$

donc $f(x) = -2\,\text{Arc}\sin x + k$ et par continuité de f, en prenant $x = -1$, on trouve $k = -\pi$ donc $f(x) = -\pi - 2\,\text{Arc}\sin x$.

. Pour $x \in \left]\frac{-1}{\sqrt{2}}, +\frac{1}{\sqrt{2}}\right[$ $\qquad f'(x) = \dfrac{2}{\sqrt{1-x^2}}$

donc $\quad f(x) = 2 \text{ Arc} \sin x \qquad$ ($k = 0$ en prenant $x = 0$).

. Pour $x \in \left]\frac{1}{\sqrt{2}}, 1\right[$ $\qquad f'(x) = \dfrac{-2}{\sqrt{1-x^2}}$

donc $\quad f(x) = \pi - 2 \text{ Arc} \sin x \qquad$ ($k = \pi$, en prenant $x = 1$).

4) Tableau de variations :

x	0		$\frac{1}{\sqrt{2}}$		1
$f'(x)$		$+$ $\quad +\sqrt{8}$	‖	$-\sqrt{8}$ $\quad -$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$\pi/2$	$\searrow$	0

5) La fonction f' admet des limites finies à droite et à gauche aux points $\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$ donc f est dérivable à droite et à gauche aux points $\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$ et on a :

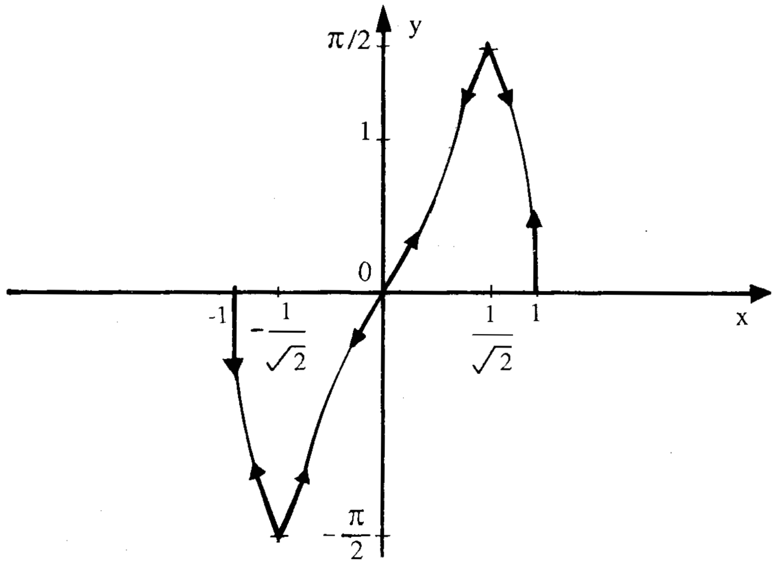
$$f'_g\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 2\sqrt{2} \quad \text{et} \quad f'_d\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -2\sqrt{2}$$

Pour $x \in \left]\frac{1}{\sqrt{2}}, 1\right[$ $\qquad f(x) = \pi - 2 \text{ Arc} \sin x.$

La fonction $x \to \text{Arc} \sin x$ n'est pas dérivable aux points ± 1, et sa courbe admet des demi-tangentes verticales en ces points. Il en est de même pour la fonction f .

6) Pour tout $x \in D_{f'}$ $\qquad f''(x) = \dfrac{\pm 2x}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}.$

La dérivée seconde s'annule au point 0 en changeant de signe donc c'est un point d'inflexion de la courbe



5.13 Etudier le sens de variation de la fonction définie par :

$$f(x) = \frac{1}{x} \cdot \text{Argsh}\, x$$

Tracer sa courbe représentative dans un repère orthonormé. (On ne demande pas le calcul d'eventuels points d'inflexion)

Solution

1) Le domaine de définition de f est : $D_f = \mathbb{R}^*$.

2) La fonction f est paire puisque la fonction Argshx est impaire.

Donc on réduit le domaine d'étude à l'intervalle $D_0 =]\,0, +\infty\,[$.

3) f est définie et continue en tout point de son domaine de définition et on a :

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} \frac{\text{Argsh} x - \text{Argsh}\, 0}{x - 0} = 1$$

Ainsi la fonction f peut être prolongée par continuité au point 0 en posant , par définition $f(0) = 1$.

Pour calculer la limite de f (x) pour x au voisinage de $+\infty$, on effectue le changement de variable $x = \text{sh}y$. Puisque la fonction sh est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$ et on a :

$$[\; x = \text{sh}y \Leftrightarrow y = \text{Argsh}x \;] \qquad \text{d'où :}$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{y \to +\infty} \frac{y}{\text{sh}\, y} = \lim_{y \to +\infty} \frac{1}{(\text{sh}\, y)/y} = 0$$

Ceci provient du fait que $\lim\limits_{y \to +\infty} (\text{sh}y)/y = +\infty$

Par conséquent la fonction f admet l'axe Ox pour asymptôte horizontale au voisinage de $+\infty$ (et de $-\infty$).

4) f est dérivable en tout point de son domaine de définition et on a :

$$f'(x) = \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} - \frac{1}{x^2} \cdot \operatorname{Arg\,sh} x = \frac{\varphi(x)}{x^2}.$$

où $$\varphi(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} - \operatorname{Argsh} x .$$

Afin de déterminer le signe de $f'(x)$, nous allons faire une étude succincte de la fonction (auxiliaire) φ .

$D_\varphi = \mathbb{R}$. φ est une fonction impaire . φ est définie, continue et dérivable sur tout $\mathbb{R}$ et on a :

$$\varphi'(x) = \frac{-x^2}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}} \leq 0 \quad \text{et} \quad [\ \varphi'(x) = 0 \iff x = 0\ ].$$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \varphi(x) = -\infty$ et $\varphi(0) = 0$. D'où le tableau de variations de φ :

x	0	$+\infty$
$\varphi'(x)$	0 —	
$\varphi(x)$	0 ↘	$-\infty$

Ce qui montre que : $\forall x \in\ ]0, +\infty[\qquad f'(x) < 0$.

5) Etude du comportement de f au voisinage de 0. Cela revient à étudier la dérivabilité de la fonction prolongée en 0. Calculons :

$$\lim_{x \to 0+} \frac{f(x) - 1}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{Argsh} x - x}{x^2}$$

Pour cela, effectuons le développement limité de la fonction Argsh au voisinage de 0 à l'ordre 3 on a :

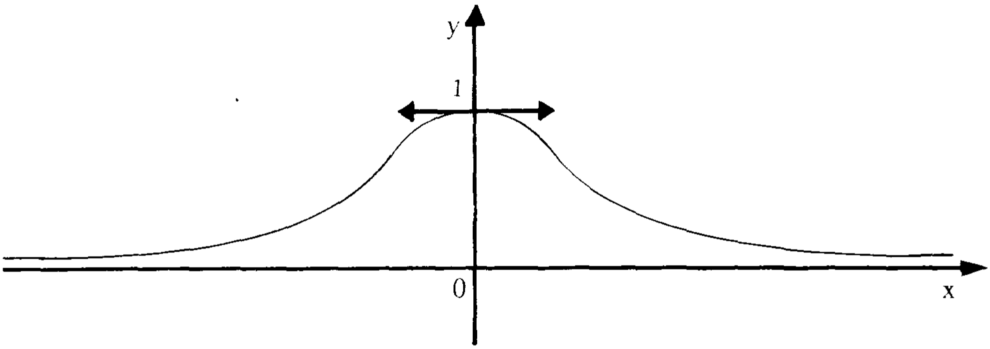
$$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = (1+x^2)^{-1/2} = 1 - \frac{1}{2}x^2 + x^2\,\varepsilon_0(x).$$

donc : $$\operatorname{Argsh} x = x - \frac{1}{6}x^3 + x^3\,\varepsilon_1(x)$$

par suite : $$\frac{\operatorname{Argsh} x - x}{x^2} = -\frac{1}{6}x + x\varepsilon_1(x) \underset{x \to 0}{\longrightarrow} 0.$$

Ce qui montre que la fonction prolongée est dérivable en 0 et a pour nombre dérivé $f'(0) = 0$.

Remarque :
L'allure de la courbe montre l'existence de 2 points d'inflexions .



5.14

> Etudier le sens de variation de la fonction définie par :
> $$f(x) = \sqrt{\frac{x^3}{x-1}}$$
> Tracer sa courbe représentative dans un repère othonrmé. (on précisera les tengentes aux points remarquables).

Solution

1°) Le domaine de définition de f est $D_f =]-\infty, 0] \cup]1, +\infty[$.

2°) D_f n'étant pas symétrique, f n'est ni paire ni impaire. Elle n'est pas périodique.

3°) f est définie et continue en tout point de son domaine de définition et on a : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty = \lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$

et $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = 0 = f(0)$ et $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = +\infty$

Donc la droite d'équation $x = 1$ est aymptote verticale à la courbe.

4°) f est dérivable en tout point de $D_f =]-\infty, 0[\cup]1, +\infty[$. et pour tout $x \in D_f$

on a : $$f'(x) = \frac{x^2(2x-3)}{2(x-1)^2 \cdot \sqrt{\frac{x^3}{x-1}}} = \frac{\sqrt{|x|}\,(2x-3)}{2.\,|x-1|\sqrt{|x-1|}}$$

Ainsi $f'(x) = 0 \iff x = 3/2$

et $f'(x) > 0 \iff x \in]3/2 ; +\infty[$

Remarquons que f' (x) admet une limite finie (égale à 0) au point 0, donc f est dérivable à gauche en 0. Ce qui nous donne :

5°) Tableau de variations :

x	$-\infty$		0		1		$3/2$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	//////		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	//////	$+\infty$	$\searrow$	$\approx 2,6$	$\nearrow$	$+\infty$

6°) Etude des branches infinies : Comme $f(x) = |x| . \sqrt{\dfrac{x}{x-1}}$, on a :

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = -1 \quad \text{et} \quad \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = +1$$

■ Au voisinage de + ∞, on a : $f(x) - x = x\left[\sqrt{\dfrac{x}{x-1}} - 1\right]$

On pose $t = \dfrac{1}{x}$ et on effectue un développement limité au voisinage de $t = 0$,

à l'ordre 1 de cette expression. Ce qui donne :

$$f(x) - x = \frac{1}{t}\left[\left(\frac{1}{1-t}\right)^{1/2} - 1\right] = \frac{1}{t}\,[(1 + t + t\,\varepsilon_0(t))^{1/2} - 1]$$

$$= \frac{1}{t}\left[\frac{1}{2}t + t\,\varepsilon_1(t)\right] = \frac{1}{2} + \varepsilon_1(t).$$

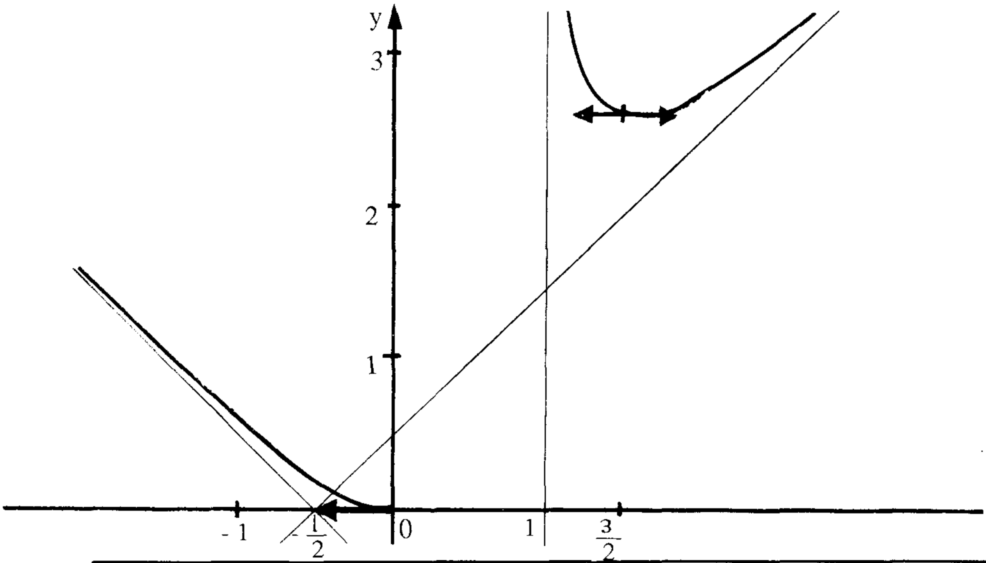
D'où $\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - x] = \lim\limits_{t \to 0} \left[\dfrac{1}{2} + \varepsilon_1(t)\right] = \dfrac{1}{2}$

Ainsi, la droite d'équation $y = x + \dfrac{1}{2}$ est aysmptote oblique à la courbr au voisinage de + ∞.

■ Au voisinage de - ∞, on a $f(x) + x = -x\left(\sqrt{\dfrac{x}{x-1}} - 1\right)$

d'où $\lim\limits_{x \to -\infty} [\, f(x) + x \,] = -\dfrac{1}{2}$

Ainsi, la droite d'équation $y = -x - \dfrac{1}{2}$ est asymptote oblique à la courbe au voisinage de - ∞.



5.15 Etudier le sens de variation et tracer la courbe représentative de la fonction

définie par : $f(x) = \sqrt[3]{x^3 - 3x}$

On précisera les tangentes aux points remarquables et la position de la courbe par rapport aux asymptotes éventuelles.

Solution

1°) $D_f = \mathbb{R}$ f est définie et continue sur tout $\mathbb{R}$.

2°) f étant impaire, on réduit le domaine d'étude `a l'intervalle $I = [0, +\infty[$.
On complètera la construction de la courbe par symétrie par rapport à l' origine 0.

3°) les limites aux bornes : $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = f(0) = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

4°) La dérivée : La fonction f est dérivable en tout point de D_f où $f(x) \neq 0$.
Donc le domaine de dérivablité de f est : $D'_f = \mathbb{R} - \{ \sqrt{3} \ ; 0 ; \sqrt{3} \}$.

et on a : $f'(x) = \frac{1}{3}(3x^2 - 3) . (x^3 - 3x)^{-2/3} = \frac{x^2 - 1}{(\sqrt[3]{x^3 - 3x})^2}$

On en déduit le tableau de variation suivant :
5°)

x	0		1		$\sqrt{3}$		$+\infty$
f '(x)	‖	-	0	+	‖	+	
f (x)	0	↘	$-\sqrt[3]{2}$	↗	0	↗	$+\infty$

6°) Etude des tangentes aux points remarquables :

a) $$\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \sqrt[3]{1 - \frac{3}{x^2}} = -\infty$$

La courbe admet une tangente verticale au point d'abscisse 0.

b) En $\sqrt{3}$: $$\lim_{x \to \sqrt{3}} \frac{f(x) - f(\sqrt{3})}{x - \sqrt{3}} = \lim_{x \to \sqrt{3}} \sqrt[3]{\frac{x(x + \sqrt{3})}{(x - \sqrt{3})^2}} = +\infty$$

La courbe admet une tangente verticale au point d'abscisse $\sqrt{3}$ (ainsi qu'au point d'abscisse - $\sqrt{3}$, par symtrie).

7°) Recherche des branches infinies. Pour cela, calculons :

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \sqrt[3]{1 - \frac{3}{x^2}} = 1.$$

Pour calculer la limite de [f (x) - x] lorsque x tend vers + ∞, cherchons le développe ment limité de cette expression au voisinage de + ∞ . On a :

$$f(x) = -x = x\left[\sqrt[3]{1 - \frac{3}{x^2}} - 1\right]$$

En posant $t = \frac{3}{x^2}$ on cherche le développement limité à l'ordre 1 de l'expression entre crochets qui devient :

$$(1 - t)^{1/3} - 1 = 1 - \frac{1}{3}t + t \,.\, \varepsilon(t) - 1$$
$$= -\frac{1}{3}t + t \,.\, \varepsilon(t) \quad \text{où} \quad \lim_{t \to 0} \varepsilon(t) = 0$$

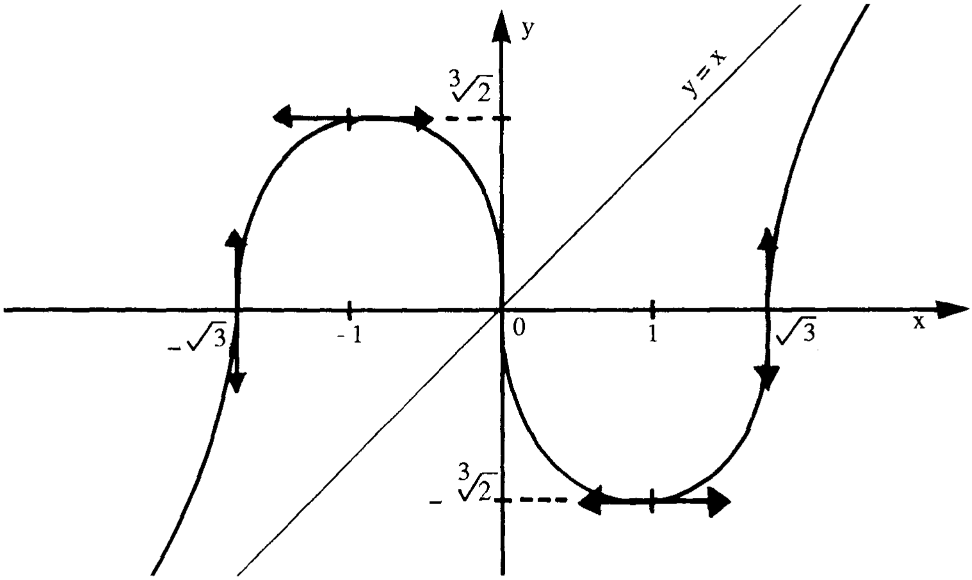
Il s'en suit que :

$$f(x) - x = x\left[-\frac{1}{x^2} + \frac{3}{x^2} \,.\, \varepsilon\left(\frac{3}{x^2}\right)\right] = -\frac{1}{x} + \frac{3}{x} \,.\, \varepsilon\left(\frac{3}{x^2}\right)$$

D'où $\lim_{x \to \infty} [\, f(x) - x] = 0$

Par conséquent, la droite d'équation $y = x$ est asymptotre (oblique) à la courbe vers + ∞ et vers - ∞. De plus, la position de la courbe par rapport à l'asymptote est précisée par le signe de [f(x) - x] , c'est-à-dire de $\left[-\frac{1}{x}\right]$ au voisinage de l'infini . Ainsi :

- Pour x au voisinage de + ∞, la courbe est située en dessous de l'asymptote.
- Pour x au voisinage de - ∞, la courbe est située au dessus de l'asymptote.



5.16 Etudier le sens de variation de la donction définie par :

$$f(x) = \frac{x+1}{x-1} \cdot \operatorname{Log}|x|$$

Tracer sa courbe représentative dans une repère orthonrmé. [Log désigne le Logarithme néperien].

Solution

1°) f est définie sur $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0 ; 1\} =]-\infty, 0[\cup]0, 1[\cup]1, +\infty[$.

2°) D_f n'étant pas symètriquee, f n'est ni paire ni impaire.

3°) f est composée de fonctions continues donc f est continue en tout point de chacun de ses intervalles de définition et on :

$\lim_{x \to 0} f(x) = +\infty$ donc la droite d'équation $x = 0$ (c'est-à-dire l'axe Oy) est asymptote verticale à la courbe.

$$\lim_{x \to 1} f(x) = \lim_{x \to 1} (x+1) \cdot \left[\frac{\operatorname{Log}|x| - \operatorname{Log}|1|}{x-1}\right] = 2.$$

Ainsi f peut être prolongée par continuité au point 1 en posant, f (1) = 2.

D'autre part $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty = \lim_{x \to -\infty} f(x)$

4°) f est dérivable en tout point de $D_{f'} = \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$ et on a :

$$f'(x) = \left[\frac{(x-1)-(x+1)}{(x-1)^2}\right] \cdot \operatorname{Log}|x| + \left(\frac{x+1}{x-1}\right) \cdot \frac{1}{x} = \frac{\varphi(x)}{(x-1)^2}.$$

où $\varphi(x) = \dfrac{x^2-1}{x} - 2 \operatorname{Log}|x|$

Ainsi, le signe de la dérivée est celui de la fonction auxiliaire φ, dont on va faire une étude succincte. φ est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et on a :

$$\varphi'(x) = \frac{x^2+1}{x^2} - \frac{2}{x} = \frac{x^2-2x+1}{x^2} = \frac{(x-1)^2}{x^2}$$

Cette quantité étant positive pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, on en déduit le tableau de variation suivant, sachant que $\varphi(-1) = 0 = \varphi(1)$.

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$\varphi'(x)$			$+$		‖		$+$		
$\varphi(x)$	$-\infty$	↗	0	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	0	↗	$+\infty$

Ainsi , $\varphi(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = -1$ ou $x = +1$

$\varphi(x) > 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \in \,]-1, 0[\, \cup \,]1, +\infty[$

$\varphi(x) < 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \in \,]-\infty, 1[\, \cup \,]0, 1[$.

5°) Par conséquent, on a le tableau de variation de la fonction prolongée :

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	0	↗	$+\infty$ ‖ $+\infty$	↘	2	↗	$+\infty$

6°) Chercher les demi-tangentes à la courbe au point 1, revient à étudier la dérivabilitée de la fonction prolongée au point 1, donc à calculer :

$$\lim_{x \to 1} \frac{f(x)-2}{x-1} = \lim_{h \to 0} \frac{f(1+h)-2}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h}\left[\frac{h+2}{h} \cdot \mathrm{Log}\,(1+h) - 2\right].$$

Le développement limité de la fonction $h \to \mathrm{Log}\,(1+h)$, au voisinage de 0, à l'ordre 3, donne :

$$\mathrm{Log}\,(1+h) = h - \frac{h^2}{2} + \frac{h^3}{3} + h^3\,\varepsilon(h)$$

$$\frac{h+2}{h} \cdot \mathrm{Log}\,(1+h) = 2 + \frac{h^2}{6} + \frac{h^3}{3} + h^3\,\varepsilon(h) \quad \text{où} \quad \varepsilon(h) \underset{h \to 0}{\longrightarrow} 0$$

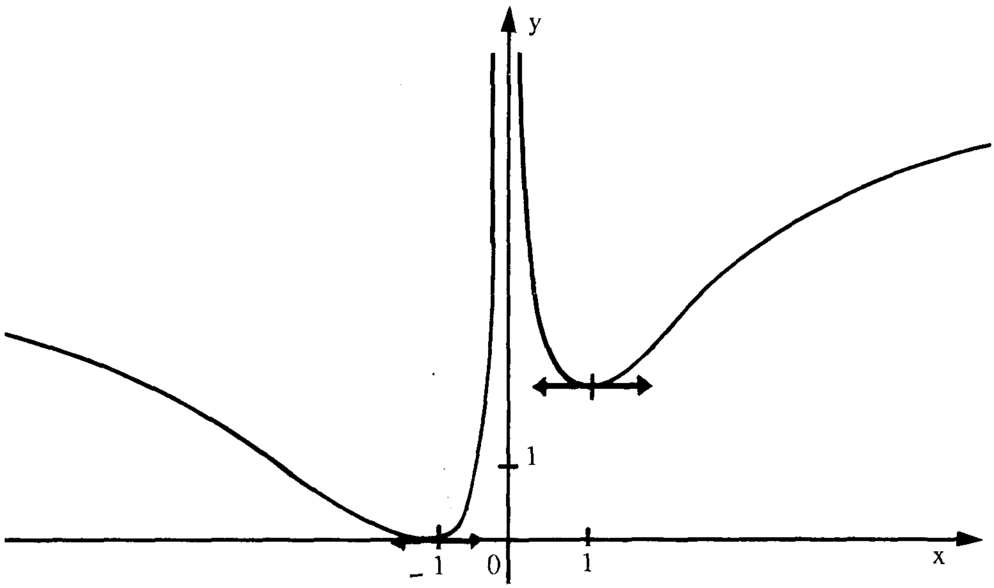
$$\lim_{h \to 0} \frac{f(1+h)-2}{h} = \lim_{h \to 0} \left[\frac{h}{6} + \frac{h^2}{3} + h^2\,\varepsilon(h)\right] = 0$$

Par conséquent, la courbe de la fonction prolongée, admet une tangente horizontale au point 1.

7°) Etude des branches infinies :

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x+1}{x-1} \cdot \frac{\operatorname{Log}|x|}{x} = 0$$

Comme $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) - Ox = +\infty$, la courbe admet une direction asymptotique d'axe Ox, vers $+\infty$ et vers $-\infty$.



5.17

> Etudier le sens de variation de la fonction définie par :
>
> $$f(x) = \frac{x^2}{x-1} e^{1/x}$$
>
> Tracer sa courbe représentative dans un repère orthogonal $(o, \vec{i}, \vec{j})$ tel que $\|\vec{i}\| = 2$ cm et $\|\vec{j}\| = 0,5$ cm
>
> On précisera la position de la courbe par rapport aux asymptotes éventuelles.

Solution

1°) $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0 ; 1\} =]-\infty, 0[\cup]0 ; 1[\cup]1 ; +\infty[$.

D_f n'est pas symètrique donc f n'est ni paire ni impaire.

2°) f est composée de fonctions continues donc elle est continue sur chacun de ses intervalles de définition . Calculons les limites aux bornes

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

$\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = 0$ mais $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = -\infty$

Ainsi f peut être prolongée par continuité à gauche seulement au point 0 en posant f (0) = 0, mais elle n'est pas prolongeable par continuité en 0 car sa limite à droite n'est pas finie.

$\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = +\infty$

Par conséquent, les droites d'équation $x = 0$ et $x = 1$ sont des asymptotes verticales à la courbe.

3°) f est dérivable en tout point où elle définie. Donc son domaine de dérivabilité est $D_{f'} = D_f$ et on a :

$$f'(x) = \frac{x^2 - 3x + 1}{(x-1)^2} e^{1/x}$$

Ainsi, la fonction dérivée a le même signe que le trinôme $x^2 - 3x + 1$ qui s'annule pour les valeurs :

$$x_1 = \frac{3 - \sqrt{5}}{2} \approx 0{,}38 \qquad \text{et} \qquad x_2 = \frac{3 + \sqrt{5}}{2} \approx 2{,}62$$

On en déduit, alors, le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		0		x_1		1		x_2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	‖	$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	0 ‖ $-\infty$	↗	$\approx (-3{,}19)$	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	$\approx 6{,}21$	↗	$+\infty$

5°) Recherche de la demi-tangente (à gauche) en 0:

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{f(x) - 0}{x - 0} = \lim_{x \to 0^-} \frac{x}{x-1} e^{1/x} = 0$$

Donc, on a une demi-tangente horizontale à gauche au point 0.

6°) Recherche des branches infinies. Pour cela calculons :

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x}{x-1} e^{1/x} = 1$$

On a $f(x) - x = x \left[\frac{x}{x-1} e^{1/x} - 1 \right]$

Posons $t = \frac{1}{x}$ et cherchons le développement limité à l'ordre 2 de l'expression entre crochets au voisinage de l'infini ; On a :

$$\frac{x}{x-1} e^{1/x} - 1 = \frac{1}{1-\frac{1}{x}} \cdot e^{1/x} - 1 = \frac{1}{1-t} \cdot e^{t} - 1.$$

où t est au voisinage de 0 . On sait que :

$$e^{t} = 1 + t + \frac{t^2}{2!} + t^2 \varepsilon_o(t) \qquad \text{et} \qquad \frac{1}{1-t} = 1 + t + t^2 + t^2 \varepsilon_1(t)$$

où ε_0 et ε_1 sont deux fonctions qui tendent vers 0 quant $t \to 0$.

Donc $\dfrac{e^{t}}{1-t} = 1 + 2t + \dfrac{5}{2} t^2 + t^2 \varepsilon_2(t)$ où $\varepsilon(t) \underset{t \to 0}{\to} 0$

D'où $\dfrac{e^{t}}{1-t} - 1 = 2t + \dfrac{5}{2} \cdot t^2 + t^2 \varepsilon_2(t)$

En revenant à la variable x, cela donne :

$$\frac{x}{x-1} e^{1/x} - 1 = \frac{2}{x} + \frac{5}{2x^2} + \frac{1}{x^2} \varepsilon_2(x) \text{ , et par suite :}$$

$$f(x) - x = x\left[\frac{2}{x} + \frac{5}{2x^2} + \frac{1}{x^2} \varepsilon_2(x)\right] = 2 + \frac{5}{2x} + \frac{1}{x} \varepsilon_2\left(\frac{1}{x}\right)$$

Ce qui entraine : $\lim\limits_{x \to \pm\infty} [\, f(x) - (x+2)\,] = 0$

Par conséquent, la droite d'équation $y = x + 2$ est asymptote (oblique) à la courbe vers $+\infty$ et vers $-\infty$. De plus, la position de la courbe par rapport à l'asymptotr est précisée par le signe de $[\, f(x) - (x+2)]$, c'est-à-dire de$\left[\dfrac{5}{2x}\right]$ au voisinge de l'infini.
Ainsi :

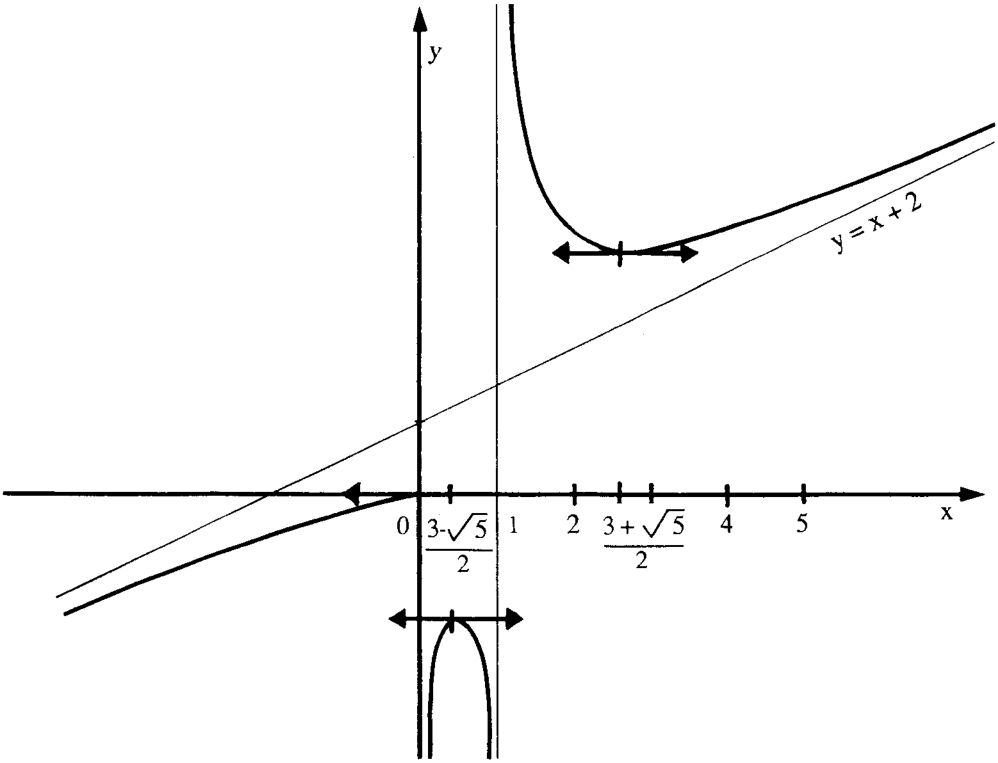
- pour x au voisinage de $+\infty$, la courbe est située au dessus de l'asymptote,
- pour x au voisinage de $-\infty$, la courbe est située en dessous de l'asymptote.

Remarque : On pourrait calculer la limite de l'expression $[\, f(x) - x]$ sans utiliser les développements limités. En effet, sin on effectue le changement de variable $t = 1/x$, on a :

$$\lim_{x \to +\infty} [\, f(x) - x] = \lim_{t \to 0^+} \frac{1}{t}\left(\frac{e^{t}}{1-t} - 1\right) = \lim_{t \to 0^+} \frac{1}{t}\left(\frac{e^{t} + t - 1}{1-t}\right)$$

$$= \lim_{t \to 0^+} \frac{1}{1-t}\left(\frac{e^{t} + t - 1}{t}\right) = \lim_{t \to 0^+} \left(\frac{e^{t} + t - 1}{t}\right)$$

qui n'est autre que le nombre dérivée de la fonction $g(t) = e^{t} + t$ au point $t = 0$, c'est-à-dire $g'(0) = 2$.



5.18

> Etudier le sens de variations de la fonction définie par :
>
> $$f(x) = |x|^{x^2}$$
>
> Tracer sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

Solution

Le domaine de définition est $D_f = \mathbb{R}^*$ puisqu' on a :

$$f(x) = e^{x^2 \operatorname{Log}|x|}$$

2°) D_f est symétrique par rapport à 0 et pout tout $x \in \mathbb{R}^*$, $f(-x) = f(x)$.

Donc f est paire. Il suffit donc de l'étudier sur $]0, +\infty[$. On complètera la construction de la courbe par symétrie par rapport à l'axe des ordonnées Oy.

3°) f est définie et continue en tout point de $]0, +\infty[$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$,

et comme $\lim\limits_{x \to 0} x^2 \operatorname{Log}|x| = 0$ on a $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 1$

Ainsi la fonction f peut être prolongée par continuité au point 0 en posant , par définition : $f(0) = 1$

4°) f est dérivable en tout point de son domaine de définition et pout tout $x \in \mathbb{R}^*$

on a : $f'(x) = x\,(1 + 2\,\mathrm{Log}\,|x|)\,e^{x^2\,\mathrm{Log}\,|x|}$

Comme f' (x) admet une limite finie (égale à 0) au point 0, la fonction prolongée est alors dérivable en 0 et sa courbe admet une tangente horizontale au point 0. Ainsi, on peut également prolonger par continuité, la fonction dérivée, au point 0 en posant f '(0) = 0.

D'autre part : $f'(x) = 0 \iff x = 0$ ou $x = e^{-1/2}$

5°) Tableau de variations de la fonction prolongée.

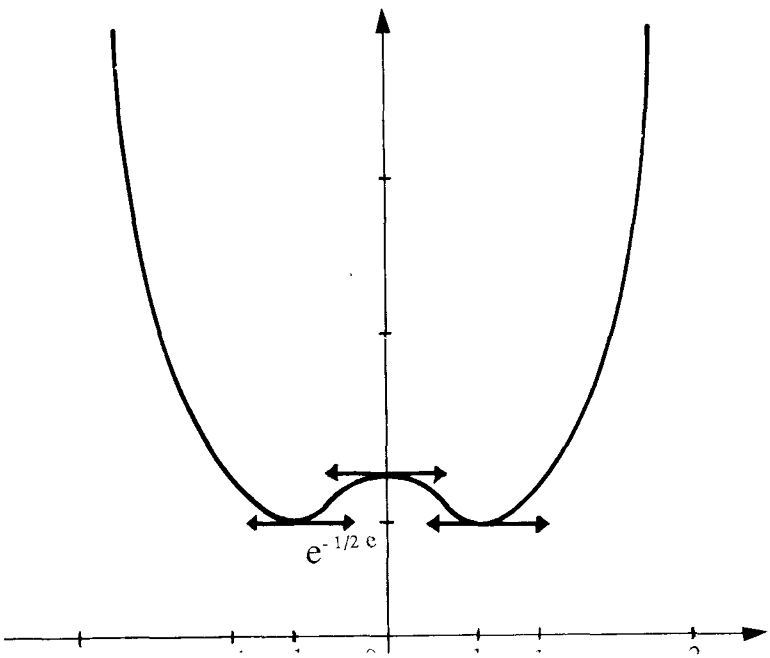
x	0		$+\dfrac{1}{\sqrt{e}}$		$+\infty$
f ' (x)	0	-	0	+	
f (x)	1	↘	$e^{-1/2e}$	↗	$+\infty$

$\dfrac{1}{\sqrt{e}} \approx 0,6$

$f\left(\dfrac{1}{\sqrt{e}}\right) \approx 0,83$

6°) Etude des branches infinies : $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{e^{x^2\,\mathrm{Log}\,|x|}}{x} = +\infty$

donc la courbe admet une branche parabolique de direction les y positifs.



5.19 Etudier le sens de variation de la fonction définie par :

$$f(x) = \left|\frac{x+1}{x}\right|^{\frac{x+1}{x}}$$

Tracer sa courbe représentative dans un repère othonrmé (on déterminera les tangentes à la courbe aux points - 1 et 0)

Solution

1) $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1 ; 0\}$

$$f(x) = \begin{cases} e^{\frac{x+1}{x} \cdot \mathrm{Log}\left(\frac{x+1}{x}\right)} & \text{si } x \in]-\infty, 1[\cup]0, +\infty[\\ e^{\frac{x+1}{x} \cdot \mathrm{Log}\left(\frac{x+1}{-x}\right)} & \text{si } x \in]-1, 0[\end{cases}$$

2) f est composée de fonctions continues donc elle est continue sur chacun de ses intervalles de définition et on a :

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 1 = \lim_{x \to +\infty} f(x)$$

Donc la droite d'équation $y = 1$ est aysmptote horizontale à la courbe vers $+\infty$ et vers $-\infty$.

D'autre part, comme $\lim_{x \to 0^+} t \,\mathrm{Log}\, t = 0$, on a : $\lim_{x \to -1} f(x) = 1$

Donc f peut être prolongée par continuité au point - 1 en posant f (- 1) = 1.

De même on a : $\lim_{x \to 0^-} f(x) = 0$, mais $\lim_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$

3) f est dérivable en tout point de son domaine et on a :

- pour $x \in]-\infty, -1[\cup]0, +\infty[$.

$$f'(x) = \left[-\frac{1}{x^2}\mathrm{Log}\left(\frac{x+1}{x}\right) + \left(\frac{x+1}{x}\right) \cdot \frac{-1/x^2}{\left(\frac{x+1}{x}\right)}\right] \cdot f(x)$$

d'où $$f'(x) = -\frac{1}{x^2}\left[\mathrm{Log}\left(\frac{x+1}{x}\right) + 1\right] \cdot f(x)$$

- pour $x \in]-1, 0[$

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2}\left[\mathrm{Log}\left(\frac{x+1}{-x}\right) + 1\right] \cdot f(x)$$

Il suffit de chercher le signe de l'expression ou entre crochets cela revient à résoudre

l'équation : $\mathrm{Log}\left|\frac{x+1}{x}\right| = -1$ ou encore : $\left|\frac{x+1}{x}\right| = \frac{1}{e}$ (*)

Si $x \in]-\infty, -1[\cup]0, +\infty[$ (*) $\Leftrightarrow$ $x = \dfrac{e}{1-e} \approx -1,58$

Si $x \in]-1, 0[$ (*) $\Leftrightarrow$ $x = \dfrac{-e}{e+1} \approx -0,73$

Sans oublier le signe négatif de $[\dfrac{-1}{x^2}]$, on en déduit le signe de la dérivée puis le tableau de variation suivant :

4°)

x	$-\infty$		$e/(1-e)$		-1		$-e/(e+1)$		0		$+\infty$
f '(x)		-		+	‖	+		−	‖	-	
f (x)	1 ↘		≈0,69	↗	1 ‖ 1	↗	≈1,45	↘	0 ‖ $+\infty$	↘	1

5°) Cherchons la demi-tangente à la courbe, à gauche au point 0. Cela revient à étudier la dérivabilité de la fonction prolongée au point 0. En effectuant le changement de x en (-x) il vient :

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{f(x)-0}{x-0} = \lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x} e^{\frac{x+1}{x} \text{Log} \left|\frac{x+1}{x}\right|} = \lim_{x \to 0^+} \frac{-1}{x \cdot e^{\frac{1-x}{x} \cdot \text{Log} \frac{1-x}{x}}}$$

Si l'on pose maintenant $t = (1-x)/x$ donc $x = 1/(t+1)$

On a : $(x \to 0+)$ $\Leftrightarrow$ $(t \to +\infty)$ donc :

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{f(x)-0}{x-0} = \lim_{t \to +\infty} \frac{t+1}{e^{t \cdot \text{Log}\, t}} = 0$$

Ainsi, la courbe admet une demi-tangente horizontale à gauche , au point 0.

■ cherchons les demi-tangentes à la courbe au point d'abscisse - 1 de la fonction prolongée. Effectuons le changement de variable $t = (x+1)/x$ donc $x = 1/(t-1)$ et $x + 1 = t/(t-1)$. Ainsi on a : $t \xrightarrow[x \to -1]{} 0$ et :

$$\frac{f(x)-1}{x+1} = \left(\frac{t-1}{t}\right)[e^{t \,\text{Log}\,|t|} - 1]$$

On fait un développement limité, à l'ordre 2, au voisinage de 0, de l'expression entre crochets en posant $Z = t \,.\, \text{Log}\,|t|$. On a : $Z \xrightarrow[t \to 0]{} 0$ et :

$$e^Z = 1 + Z + \frac{Z^2}{2!} + Z^2 \varepsilon(Z).$$

Donc $$e^{t\,\mathrm{Log}\,|t|} = 1 + t\,\mathrm{Log}\,|t| + \frac{t^2}{2}\mathrm{Log}\,|t| + t^2\,\mathrm{Log}^2\,|t|\,\varepsilon(t\,\mathrm{Log}\,|t|)$$

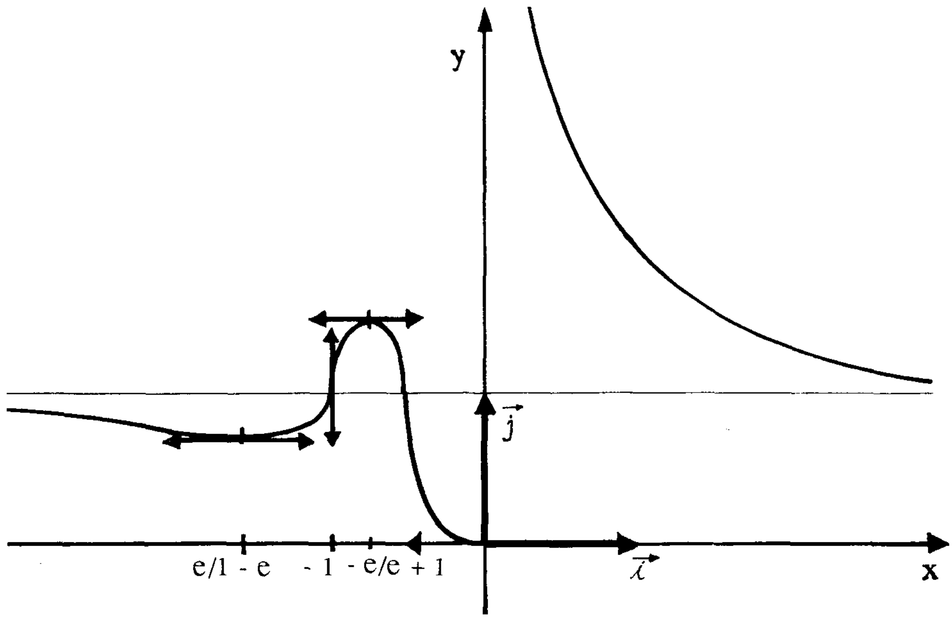
D'où $$\left(\frac{t-1}{t}\right)[e^{t\,\mathrm{Log}\,|t|} - 1] = (t-1)\,\mathrm{Log}\,|t| + \frac{(t-1)}{2}.\,t\,\mathrm{Log}^2\,|t| +$$

$$[(t-1).t\ \mathrm{Log}^2\,|t|]\ \varepsilon\ (t\ \mathrm{Log}\,|t|)$$

Lorsque t tend vers 0, le premier terme de cette expression tend vers $+\infty$ et les autres vers 0. Il s'en suit que :

$$\lim_{x \to -1} \frac{f(x) - 1}{x + 1} = +\infty$$

Par conséquent, la courbe admet une tangente verticale au point - 1.



5.20

Considèrons la famille de fonctions définies à l'aide du paramètre réel λ par :

$$f_\lambda(x) = \left(\lambda\,(x-1) + \frac{1}{x+1}\right)\,e^x$$

a) Montrer que toutes les coubes $\mathscr{C}_\lambda$ passent par un même point fixe A que l'on déterminera.

b) Etudier le comportement de f_λ au voisinage de $+\infty$, $-\infty$ et du point - 1. On précisera les asymptotes éventuelles.

c) Etudier le sens de variation de f_λ. Montrer que pour $\lambda < 0$ et $\lambda \neq -1$, f_λ admet deux extrêmums d'abscisses non nulles : $x_1(\lambda) < x_2(\lambda)$.

d) Déterminer l'ensemble Γ des points P_λ des courbes $\mathscr{C}_\lambda$ correspondant à ces extrêmums.

c) Tracer sur une même figure les courbes $\mathscr{C}_\lambda$ pour

$$\lambda = -2\ ;\ -1\ ;\ -\frac{1}{2}\ ;\ 0\ ;\ 1\ ;\ 2.$$

Solution

a) D'abord toutes les fonctions f_λ sont définies sur le même domaine :

$D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

Soit M (x,y) un point du plan et soit $(\lambda, \lambda') \in \mathbb{R}^2$. On a :

$$M \in \mathscr{C}_\lambda \cap \mathscr{C}_{\lambda'} \iff f_\lambda(x) = y = f_{\lambda'}(x)$$

$$\iff \left(\lambda(x-1) + \frac{1}{x+1}\right)e^x = \left(\lambda'(x-1) + \frac{1}{x+1}\right)e^x$$

$$\iff (x-1)(\lambda - \lambda') = 0$$

Comme $\lambda \neq \lambda'$, ceci entraine que le point A, intersection de toutes les courbes $\mathscr{C}_\lambda$ a pour abscisse $x = 1$ donc : A : (1 , e /2). Et c'est le seul point d'intersection, d'après les équivalences précédentes .

b) Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, f_λ est continue en tout point de son domaine de définition et on a $\lim\limits_{x \to -\infty} f_\lambda(x) = 0$.

Donc l'axe des abscisses est asymptote à toutes les courbes $\mathscr{C}_\lambda$ vers $-\infty$.

D'autre part suivant le signe de λ, on a :

$$\lim_{x \to +\infty} f_\lambda(x) = \begin{cases} +\infty & \text{si } \lambda \geq 0 \\ -\infty & \text{si } \lambda < 0 \end{cases}$$

Et comme l'exponentielle l'emporte sur la fonction puissance, le rapport $f_\lambda(x)/x$ tend vers $+\infty$ si $\lambda \geq 0$ et vers $-\infty$ si $\lambda < 0$ lorsque x tend vers $+\infty$. Par conséquent, toutes les courbes, $\mathscr{C}_\lambda$ admettent des branches paraboliques dirigées vers les y positifs si $\lambda \geq 0$ et vers les y négatifs si $\lambda < 0$.

c) Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, f est dérivable sur son domaine de définition $D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ et on a :

$$f'_\lambda(x) = \left[\lambda + \frac{1}{(x+1)^2}\right] . \, x\, e^x .$$

■ <u>1er cas</u> : $\lambda \geq 0$

Le terme entre crochets dans $f'_\lambda(x)$ ne s'annule jamais.

Donc $[f'_\lambda(x) = 0 \iff x = 0]$ et $[f'_\lambda(x) > 0 \iff x > 0]$

Ce qui donne le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
$f'_\lambda(x)$		$-$	‖	$-$	0	$+$	
$f_\lambda(x)$	0	↘	‖ $+\infty$ / $-\infty$	↘	$(1-\lambda)$	↗	$+\infty$

Ainsi, pour $\lambda \geq 0$, la fonction f'_λ admet un seul extrêmum d'abscisse nulle.

■ <u>2ème cas</u> : $\lambda < 0$

i) 1er sous cas $\lambda = -1$

$$f'_{-1}(x) = (1 - (x+1)^2) \cdot \frac{x\,e^x}{(x+1)^2} = \frac{-(x+2)\,x^2\,e^x}{(x+1)^2}$$

Ce qui donne le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		-2		-1		0		$+\infty$
$f'_\lambda(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$-$	
$f_\lambda(x)$	0	↗	$2/e^2$	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	$(1-\lambda)$	↘	$-\infty$

Par suite, la fonction f_{-1} admet un seul extrêmum d'abscisse <u>non</u> nulle.

ii) 2ème sous cas $-1 < \lambda < 0$

Posons $t = \sqrt{-\lambda}$ donc $\lambda = t^2$ et $0 < t < 1$.

$$f'_\lambda(x) = (1 - t^2(x+1)^2)\,\frac{x\,e^x}{(x+1)^2} = (1 - t(x+1))\,(1 + t(x+1))\,\frac{x\,e^x}{(x+1)^2}$$

D'où $f'_\lambda(x) = 0 \iff x = 0$ ou $x = \dfrac{1-t}{t}$ ou $x = \dfrac{-1-t}{t}$

$\iff x = 0$ ou $x = \dfrac{1}{t} - 1$ ou $x = -\dfrac{1}{t} - 1$

Posons $x_1(\lambda) = -1 - \dfrac{1}{\sqrt{-\lambda}} < -1$ et $x_2(\lambda) = -1 + \dfrac{1}{\sqrt{-\lambda}} > -1$

Comme $\lambda \in]-1, 0[$ donc $t \in]0, 1[$ D'où :

$x_1(\lambda) < -1 < 0 < x_2(\lambda)$

Ce qui donne le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		$x_1(\lambda)$		-1		0		$x_2(\lambda)$		$+\infty$
$f'_\lambda(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	0	$-$	
$f_\lambda(x)$	0	↗	$-2\lambda\, e^{-\frac{1}{\sqrt{-\lambda}}-1}$	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	$1-\lambda$	↗	$-2\lambda\, e^{\frac{1}{\sqrt{-\lambda}}-1}$	↘	$-\infty$

Ainsi, pour $-1 < \lambda < 0$, f_λ admet trois extrêmums dont deux d'abscisses non nulles.

iii) 3ème sous cas : $\lambda < -1$ donc $t > 1$ et on a : $x_1(\lambda) < -1 < x_2(\lambda) < 0$
Ce qui donne le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		$x_1(\lambda)$		-1		$x_2(\lambda)$		0		$+\infty$
$f'_\lambda(x)$		$+$	0	$-$	||	$-$	0	$+$	0	$-$	
$f_\lambda(x)$	0	↗	$-2\lambda e^{-\frac{1}{\sqrt{-\lambda}}-1}$	↘	$-\infty$ || $+\infty$	↘	$-2\lambda e^{\frac{1}{\sqrt{-\lambda}}-1}$	↗	$(1-\lambda)$	↘	$-\infty$

Par conséquent, pour tout $\lambda < 0$ et $\lambda \neq -1$, la fonction f_λ admet deux extrêmus d'abscisses non nulles.

d) Lorsque λ varie dans $]-\infty\,;0[$, le nouveau paramètre $t = \sqrt{-\lambda}$ varie dans $]0\,;+\infty[$ et les points P_λ varient sur la courbe Γ, réunion dew deux courbes Γ_1 et Γ_2 définies par les équations paramètriques :

$$\Gamma_1 : \begin{cases} x(t) = x_1(\lambda) = \dfrac{1}{t} - 1 & t \in\,]0\,;+\infty[\\ y(t) = f_1(x_1(\lambda)) = +2t^2 e^{+\frac{1}{t}-1} \end{cases}$$

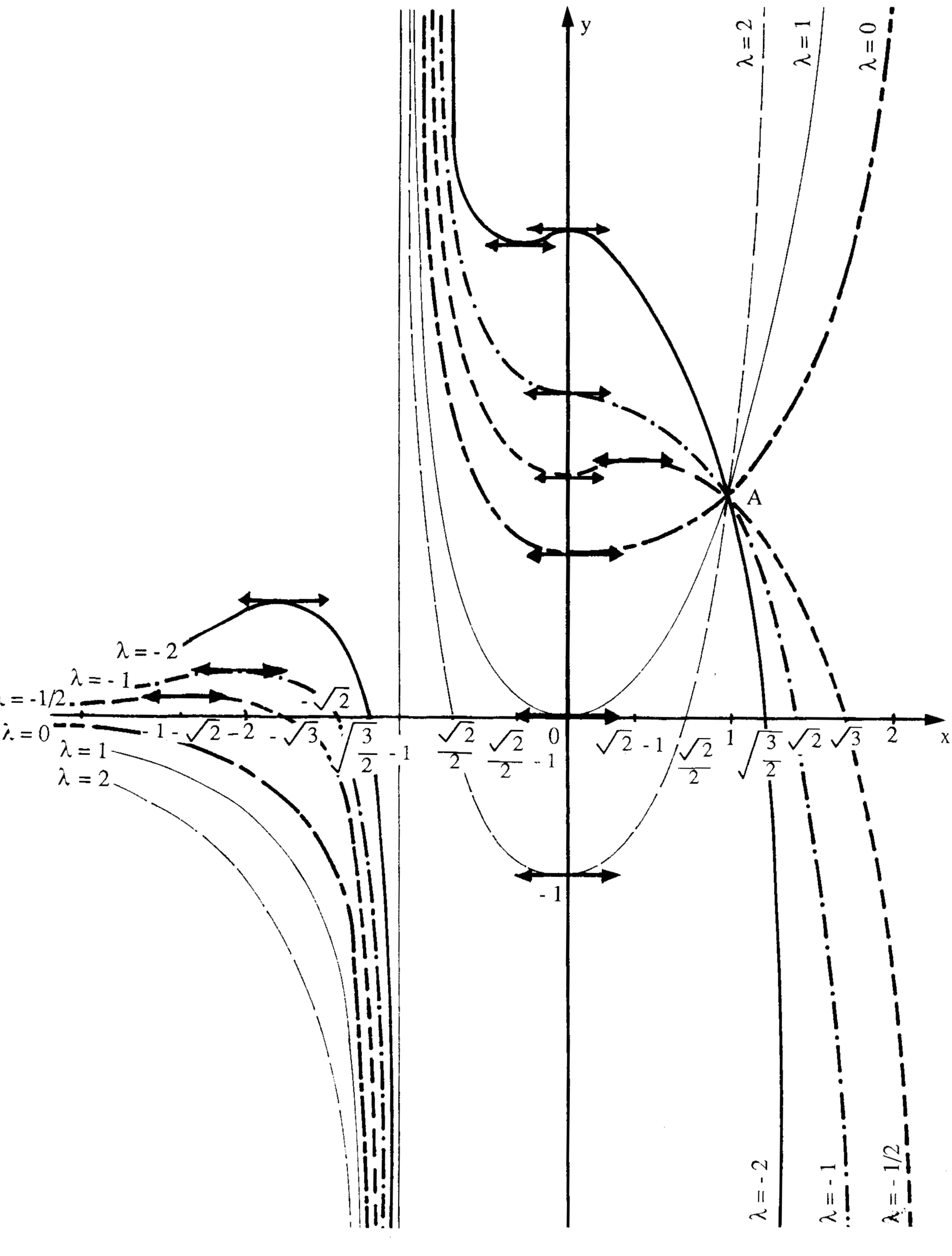
$$\text{et } \Gamma_2 \begin{cases} x(t) = x_2(\lambda) = -\dfrac{1}{t} - 1 & t \in\,]0\,;+\infty[\\ y(t) = f_\lambda(x_2(\lambda)) = +2t^2 e^{-\frac{1}{t}-1} \end{cases}$$

Remarquons que la courbe Γ_2 se déduit de Γ_1 en changeant t en $-t$. Autrement dit, la courbe $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ a pour équation paramétrique :

$$\Gamma : \begin{cases} x(t) = \dfrac{1}{t} - 1 \\ y(t) = +2t^2 e^{\frac{1}{t}-1} \end{cases} \quad \text{où } t \in \mathbb{R}^*$$

En éliminant le paramètre t entre ces 2 équations (écrire t en fonction de x puis remplacer dans y) on trouve une équation "classique" de la courbe Γ :

$$y = \frac{+2e^x}{(x+1)^2} \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$$


y
x
A
$\lambda = 2$
$\lambda = 1$
$\lambda = 0$
$\lambda = -2$
$\lambda = -1$
$\lambda = -1/2$
$\lambda = 0$
$\lambda = 1$
$\lambda = 2$
$-1-\sqrt{2}$
-2
$-\sqrt{3}$
$-\sqrt{2}$
$-\sqrt{\frac{3}{2}}$
-1
$-\frac{\sqrt{2}}{2}$
$\frac{\sqrt{2}}{2}-1$
0
$\sqrt{2}-1$
$\frac{\sqrt{2}}{2}$
1
$\sqrt{\frac{3}{2}}$
$\sqrt{2}$
$\sqrt{3}$
2
-1
$\lambda = -2$
$\lambda = -1$
$\lambda = -1/2$

INTEGRALES

6.1 Soit n un entier naturel non nul. Considère la fonction f définie par :

$$f(x) = \frac{p^2}{n^2} \quad \text{si} \quad x \in \left[\frac{p}{n}, \frac{p+1}{n}\right[,$$

pour tout entier p tel que $0 \leq p \leq n - 1$ et $f(1) = 1$.

a) Montrer que f est une fonction en escalier.

b) Calculer en fonction de n : $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx$

Solution

a) L'entier naturel non nul n étant fixé, on définit la subdivision

$$\sigma_n = \{ x_o = 0 , x_1 , x_2 ,\dots , x_n = 1 \}$$

de l'intervalle [0,1] par : $x_p = \frac{p}{n}$ où $0 \leq p \leq n$.

La fonction f est alors constante sur chacun des intervalles $]x_p , x_{p+1}[$

où $0 \leq p \leq n-1$ avec : $\forall x \in]x_p , x_{p+1}[$ $\xi_p = f(x) = \frac{p^2}{n^2}$ et $f(x_p) = x_p$

Ce qui prouve que f est bien une fonction en escalier.

b) Par définition $I = \displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx = \sum_{p=0}^{n-1} (x_{p+1} - x_p).\xi_p = \sum_{p=1}^{n-1} \frac{1}{n} . \left(\frac{p^2}{n^2}\right) = \frac{1}{n^3} \sum_{p=0}^{n-1} p^2 .$

Or $S_2 = 1^2 + 2^2 + \dots + (N-1)^2 + N^2 = \dfrac{N(N+1)(2N+1)}{6}$

Donc pour N= (n-1). On trouve : $I = \dfrac{1}{6n^3}(n-1).n.(2n-1) = \dfrac{n(n-1)(2n-1)}{6n^3}$

Finalement : $I = \dfrac{(n-1)(2n-1)}{6n^2}$ ■

6.2 Soit a un nombre réel strictement positif. Soit f une fonction définie et intégrable sur [-a,a]. Montrer que :

a) Si f est impaire, alors $\displaystyle\int_{-a}^{+a} f(x)\,dx = 0$

b) Si f est paire, alors $\displaystyle\int_{-a}^{+a} f(x)\,dx = 2.\int_{0}^{a} f(x)\,dx$

c) En déduire $\displaystyle\int_{-\frac{3\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} x^2 \sin^7 x\,dx.$

Solution

a) Soit f une fonction impaire est intégrable sur [-a,a].

D'après la relation de Chasles :

$$\int_{-a}^{+a} f(x)\,dx = \int_{-a}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{+a} f(x)\,dx. \qquad (*)$$

Dans la première intégrale du membre de droite, on fait le changement de variable $x = -t$, donc $dx = -dt$. En changeant les bornes et f(x) il vient :

$$\int_{-a}^{0} f(x)\,dx = \int_{a}^{0} -f(t)\;.\;(-dt) = \int_{a}^{0} f(t)\,dt = -\int_{0}^{a} f(t)\,dt.$$

En remplaçant dans la relation (*) il s'en suit :

$$\int_{-a}^{+a} f(x)\,dx = 0$$

b) Lorsque f est paire, un calcul identique montre que : $\displaystyle\int_{-a}^{0} f(x)\,dx = \int_{0}^{a} f(t)\,dt$

on en déduit que : $\displaystyle\int_{-a}^{+a} f(x)\,dx = 2.\int_{0}^{+a} f(x)\,dx.$

c) Comme la fonction définie par $f(x) = x^2 \sin^7 x$ est impaire :

$$\int_{-3\frac{\pi}{2}}^{3\frac{\pi}{2}} x^2 \sin^7 x\,dx = 0$$

6.3 Soit f une fonction intégrable sur tout intervalle fermé borné de $\mathbb{R}$.
Montrer que si f est périodique de période T, alors :

a) $\forall\, a \in \mathbb{R}, \forall\, b \in \mathbb{R}$ $\quad \displaystyle\int_a^{a+T} f(x)\,dx = \int_b^{b+T} f(x)\,dx.$

b) $\forall\, a \in \mathbb{R}, \forall\, n \in \mathbb{Z}$ $\quad \displaystyle\int_a^{a+nT} f(x)\,dx = n.\int_a^{a+T} f(x)\,dx.$

En déduire la valeur de $\quad \displaystyle I = \int_{\frac{\pi}{2}}^{3\frac{\pi}{2}} \sin^3(2x)\,dx.$

Solution

a) Pour tout $a \in \mathbb{R}$ on pose $\quad \displaystyle I_a = \int_a^{a+T} f(x)\,dx.$

On doit alors montrer que pour tous réels a et b : $I_a = I_b$.
Pour cela, il suffit de montrer que, pour tout $a \in \mathbb{R}$, $I_a = I_0$ c'est a dire :

$$\int_a^{a+T} f(x)\,dx = \int_0^T f(x)\,dx.$$

On a : $$I_a = \int_a^0 f(t)\,dx + \int_0^T f(x)\,dx + \int_T^{a+T} f(x)\,dx.$$

Considérons alors l'intégrale : $\quad \displaystyle J_a = \int_T^{a+T} f(x)\,dx.$

et faisons le changement de variable : $x = t + T$.
On a alors : $t = x - T$ et $dx = dt$.

Ainsi : $$J_a = \int_0^a f(t+T)\,dt$$

Or f est périodique de période T, donc $\forall\, t \in \mathbb{R}$ $\quad f(t+T) = f(t)$.

Donc $\displaystyle J_a = \int_0^a f(t+T)\,dt$ $\qquad$ D'où $\displaystyle I_a = \int_a^0 f(x)\,dx + \int_0^T f(x)\,dx + \int_0^a f(x)\,dt.$

C'est-à-dire que : $I_a = \displaystyle\int_0^T f(x)\,dx.$

Ce qui montre que I_a est indépendante du choix de a.

b) D'après ce qui précède; il suffit de montrer que :

$$\forall\ n \in \mathbb{Z} \qquad \int_0^{nT} f(x)\,dx = n \, . \int_0^T f(x)\,dx. \qquad (*)$$

D'abord le changement de variable x = - t montre que la relation (*) est vraie pour n ∈ **N**, elle reste également vraie pour n' = - n. Donc on peut supposer que n ∈ **N** .
D'après la relation de Chasles, on peut écrire :

$$\int_a^{a+nT} f(x)\,dx = \sum_{k=0}^{(n-1)} \int_{a+kT}^{a+(k+1)T} f(x)\,dx = n \, . \, I_o$$

■

6.4 Soit f une fonction continue sur [a,b] , distincte de la fonction nulle sur [a,b] et telle que : $\forall\ x \in [a\,,b] \quad f(x) \geq 0$

a) Montrer que $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx > 0$

b) En déduire que si h est une fonction (quelconque) continue sur [a,b], alors :

$$\int_a^b h^2(x)\,dx = 0 \Rightarrow h = 0$$

Solution

a) La fonction f n'étant pas constamment nulle, il existe un point $x_o \in [a\,,b]$ tel que $f(x_o) \neq 0$ donc $f(x_o) > 0$ par hypothèse.
D'autre part, comme f est continue sur [a,b], elle est continue en x_o Ainsi ; par définition : $\forall\ \varepsilon > 0 \quad \exists\, \eta > 0\ \ \forall\, x \in [a\,,b]\,[\,|x - x_o| < \eta \Rightarrow |f(x) - f(x_o)| < \varepsilon\,].$

Réécrivons cette propriété pour $\varepsilon_o = f(x)/2$, et posons pour le $\eta > 0$ correspondant $\alpha = x_o - \eta$ et. $\beta = x_o + \eta$. pour tout $x \in [\alpha\,,\beta]$

on a : $-\varepsilon_o < |f(x) - f(x_o)| < \varepsilon_o$. Ce qui entraine : $f(x_o) - \varepsilon_o < f(x) < f(x_o) + \varepsilon_o$

Comme $f(x_o) > 0$, on a : $K = f(x_o) - \varepsilon_o > 0$, donc : $\forall\ x \in [\alpha\,,\beta]\ \ f(x) > K > 0.$

Ainsi : $$\int_\alpha^\beta f(x)\,dx \geq \int_\alpha^\beta K.\,dx = K(\beta - \alpha) > 0$$

Maintenant on a : $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^\alpha f(x)\,dx + \int_\alpha^\beta f(x)\,dx + \int_\beta^b f(x)\,dx$.

Dans le second membre, le premier et le troisième terme sont positifs ou nuls (puisque f est positive sur [a,b]), alors que le terme du milieu est strictement positif.

Ainsi : $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx \geq \int_\alpha^\beta f(x)\,dx > 0$

b) Soit h une fonction continue sur [a,b]. Alors la fonction h^2 est également

continue sur [a,b]. Supposons que $\displaystyle\int_a^b h^2(x)\,dx = 0$

Si l'on suppose h^2 que n'est pas constamment nulle ; d'après la question précédente on peut en déduire que $\displaystyle\int_a^b h^2(x)\,dx > 0$
Ce qui serait absurde. Donc : $h \equiv 0$ ■

6.5

> a) Montrer que pour tous entiers m,n on a l'égalité :
> $$\int_0^1 x^m (1-x)^n\,dx = \int_0^1 x^n (1-x)^m\,dx .$$
> b) Calculer la valeur commune I de ces 2 intégrales.

Solution

a) le changement de variable $t = (1-x)$, c'est-à-dire $x = 1-t$ et $dx = -dt$; entraine :

$$\int_0^1 x^m (1-x)^n\,dx = \int_1^0 (1-t)^m \cdot t^n \cdot (-dt) = \int_0^1 t^n \cdot (1-t)^m\,dt .$$

b) D'après la formule du binôme ; on a

$$(1-x)^n = \sum_{p=0}^{n} C_n^p\,(-1)^p \cdot x^p .$$

Donc :
$$x^m \cdot (1-x)^n = \sum_{p=0}^{n} C_n^p\,(-1)^p \cdot x^{m+p} .$$

En suppposant que $m \neq 0$, il vient :

$$I = \int_0^1 \left(\sum_{p=0}^{n} C_n^p\,(-1)^p \cdot x^{m+p} \right) dx = \sum_{p=0}^{n} C_n^p\,(-1)^p \cdot \int_0^1 x^{m+p}\,dx .$$

$$= \sum_{p=0}^{n} C_n^p\,(-1)^p \left[\frac{1}{m+p+1} \cdot x^{m+p+1} \right]_0^1 = \sum_{p=0}^{n} C_n^p\,\frac{(-1)^p}{m+p+1} .$$

D'après la première question on peut écrire : ($n \neq 0$ et $m \neq 0$).

$$I = \sum_{p=0}^{n} C_n^p \frac{(-1)^p}{m+p+1} = \sum_{p=0}^{m} C_m^p \frac{(-1)^p}{n+p+1}.$$

(voir une formule plus simple dans l'exercice suivant.) ■

6.6 Pour tous entiers naturels m,n on définit

$$I_{(m,n)} = \int_a^b (x-a)^m (b-x)^n \, dx .$$

1) On se propose de calculer I de deux manières :

a) en utilisant le changement de variable $t = x - a$ et la formule du binôme

b) en établissant, à l'aide d'une intégration par parties, une relation de récurrence entre $I_{(m,n)}$ et $I_{(m,n+1)}$ puis en déduisant $I_{(m,n)}$ du calul de $I_{(0,m+n)}$

2) Déduire de ce qui précède que : $\displaystyle\sum_{p=0}^{n} \frac{(-1)^p}{m+p+1} C_n^p = \frac{1}{m+n+1} \cdot C_{m+n}^m$

Solution

1) Calcul de l'intégral $I_{(m,n)} = \displaystyle\int_a^b (x-a)^m (b-x)^n \, dx$.

a) En utilisant le changement de variable $t = x - a$ (donc $dx = dt$)

il vient : $$I_{(m,n)} = \int_0^{b-a} t^m (a+b-t)^n \, dt.$$

Or d'après la formule du binôme : $$(a+b-t)^n = \sum_{p=0}^{n} C_n^p (-1)^p . (a+b)^{n-p}$$

donc : $$t^m . (a+b-t)^n = \sum_{p=0}^{n} C_n^p (-1)^p (a+b)^{n-p} . t^{m+p} .$$

Ainsi : $$I_{(m,n)} = \left[\sum_{p=0}^{n} C_n^p (-1)^p (a+b)^{n-p} . \frac{t^{m+p+1}}{m+p+1} \right]_0^{b-a}$$

D'où : $$I_{(m,n)} = \sum_{p=0}^{n} C_n^p \frac{(-1)^p}{m+p+1} . (a+b)^{n-p} . (b-a)^{m+p+1}$$

b) En utilisant intégration par parties, en posant :

$u = (x-a)^m \qquad u' = m . (x-a)^{m-1}$

$v' = (b-x)^n \qquad v = \dfrac{-1}{n+1} (b-x)^{x+1}$

On a pour $m \neq 0$:

$$I_{(m,n)} = \left[\frac{-1}{n+1} \cdot (x-a)^m \cdot (b-x)^{n+1}\right]_a^b + \frac{m}{n+1} \cdot \int_a^b (x-a)^{m-1} \cdot (b-x)^{n+1}$$

D'où : $\boxed{I_{(m\,,\,n)} = \frac{m}{n+1}\, I_{(m-1\,;\,n+1)}}$

En réécrivant cette formule pour différentes valeurs de m on aura :

$$I_{(m\,,\,n)} = \frac{m}{n+1} \cdot \frac{m-1}{n+2} \cdot \frac{m-2}{n+3} \cdots \frac{1}{n+m} \cdot I_{(o\,,\,n+m)}$$

$$= \frac{m\,!}{(n+1)\,(n+2)\ldots(n+m)} \cdot I_{(o\,,\,n+m)}$$

ou encore la formule : $\boxed{I_{(m\,,\,n)} = \frac{m\,!\,n\,!}{(n+m)\,!} \cdot I_{(o\,,\,n+m)} = C_{n+m}^{m} \cdot I_{(o\,,\,n+m)}}$

Calculons maintenant $I_{(o,n+m)}$.

$$I_{(o\,,\,n+m)} = \int_a^b (b-x)^{n+m}\,dx = \left[\frac{-1}{n+m+1} \cdot (b-x)^{n+m+1}\right]_a^b$$

$$= \frac{1}{n+m+1} \cdot (b-a)^{n+m+1}$$

Il en résulte que : $\boxed{I_{(m\,,\,n)} = \frac{1}{n+m+1} C_{n+m}^{m} \cdot (b-a)^{n+m+1}}$

2) En choisisant $a = 0$ et $b = 1$ puis en écrivant l'égalité de la formule ci-dessus avec celle trouvée dans la question a), on trouve :

$$\boxed{\sum_{p=0}^{n} \frac{(-1)^p}{m+p+1} \cdot C_n^p = \frac{1}{m+n+1} \cdot C_{m+n}^{m}}$$

■

6.7 Soit f une fonction définie et deux fois dérivable sur [a,b]. Montrer que :

$$\int_a^b x\, f''(x)\,dx = [\ b\,f'(b) - f(b)\ ] - [\ a\,f'(a) - f(a)\ ] \ .$$

Solution

En faisant une intégration par parties, en posant : $\begin{cases} u = x & \text{donc} \quad u' = 1 \\ v' = f\,'(x) & \text{donc} \quad v = f(x) \end{cases}$

On a : $\displaystyle\int_a^b x\, f''(x)\, dx = [x f'(x)]_a^b - \int_a^b f'(x)\, dx$

$$= b f'(b) - a f'(a) - [f(x)]_a^b$$

$$= bf'(b) - af'(a) - f(b) + f(a)$$

$$= [bf'(b) - f(b)] - [af'(a) - f(a)]$$

■

6.8 Dans chacun des cas suivants, calculer la valeur moyenne de la fonction f sur l'intervalle indiqué :

a) $f(x) = |x|$ sur $I = [-2,2]$.

b) $f(x) = x^2 + 3x + 2$ sur $I = [-1 ; 0]$ puis sur $J = [-1 ; 1]$.

c) $f(x) = \cos x$ sur $I = \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ puis sur $J = [0, 2\pi]$

Solution

La valeur moyenne d'une fonction intégrable sur [a,b] est égale à : $\mu = \frac{1}{b-a} \cdot \displaystyle\int_a^b f(x)\, dx$.

a) $\mu = \dfrac{1}{2-(-2)} \cdot \displaystyle\int_{-2}^{2} |x| \, . dx = \frac{1}{4} \cdot 2 \cdot \int_0^2 x\, dx = 1$.

b) sur $I = [-1,0]$: $\mu_1 = \dfrac{1}{0-(-1)} \cdot \displaystyle\int_{-1}^{0} (x^2 + 3x + 2)\, dx = \frac{3}{2}$.

sur $J = [-1, 1]$: $\mu_2 = \dfrac{1}{2} \cdot \displaystyle\int_{-1}^{1} (x^2 + 3x + 2)\, dx = 3$.

c) sur $I = \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ $\mu_1 = \dfrac{2}{\pi} \cdot \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\, dx = \frac{2}{\pi}$.

sur $J = [0, 2\pi]$ $\mu_2 = \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_0^{2\pi} \cos x\, dx = 0$

■

6.9 Soient f une fonction continue dans [a,b] et g une fonction croissante et continûment dérivable dans [a,b]. Montrer qu'il existe $c \in [a,b]$ tel que :

$$\int_a^b f(x)\, g'(x)\, dx = f(c)\, [\, g(b) - g(a)\,]$$

Solution

La fonction g étant continûment dérivable et croissante, g' est alors continue et positive sur [a,b]. Donc, on peut appliquer le théorème de la valeur moyenne à f, qui est continue et g' qui garde un signe constant. Ainsi, il existe un $c \in [a,b]$

tel que : $$\int_a^b f(x) \,.\, g'(x)\,dx = f(c) \,.\, \int_a^b g'(x)\,dx \,.$$

Or : $$\int_a^b g'(x)\,dx = [g(x)]_a^b = g(b) - g(a) \,.$$

D'où : $$\exists c \in [a,b] \quad \int_a^b f(x) \,.\, g'(x)\,dx = f(c) \,.\, [g(b) - g(a)] \,.$$ ■

6.10

> Soit f une fonction admettant une dérivée seconde continue sur l'intervalle [a,b]
>
> a) Déterminer une primitive de la fonction φ définie par :
>
> $$\varphi(x) = [f''(x) + f(x)] \sin(x - a) \,.$$
>
> b) En déduire : $\displaystyle\int_a^b \varphi(x)\,dx$.
>
> c) On suppose que $b - a = \pi$ et que f est strictement positive sur [a,b].
>
> Montrer qu'il existe un réel $\alpha \in [a,b]$ tel que $f''(\alpha) + f(\alpha) > 0$

Solution

a) Pour chercher une primitive de la fonction φ, calculons les dérivées des deux fonctions :

$$[f(x) \,.\, \cos(x-a)]' = f'(x) \cos(x-a) - f(x).\sin(x-a).$$
$$[f'(x) \,.\, \sin(x-a)]' = f''(x) \sin(x-a) + f'(x).\cos(x-a).$$

En retranchant membre à membre la première à la seconde égalité, il vient :

$$[f'(x) \,.\, \sin(x-a) - f(x) \,.\, \cos(x-a)]' = \varphi(x) \,.$$

Ainsi une primitive de φ est la fonction Φ définie sur [a,b] par :

$$\Phi(x) = f'(x) \sin(x-a) - f(x) \cos(x-a) \,.$$

b) $$\int_a^b \varphi(x)\,dx = \Phi(b) - \Phi(a) = f'(b) \,.\, \sin(b-a) - f(b) \,.\, \cos(b-a) + f(a).$$

c) On suppose maintenant que $b - a = \pi$ et f strictement croissante . Cela donne :

$$\int_a^b \varphi(x)\,dx = f(b) + f(a) > 0.$$

f étant deux fois dérivable et f'' continue entrainent que φ est aussi une fonction continue sur [a,b]. D'après le théorème de la valeur moyenne :

$$\exists\, \alpha \in [a\,,b] \quad \varphi(\alpha) = \mu = \frac{1}{b-a} \cdot \int_a^b \varphi(x)\, dx\,.$$

d'où : $$\exists\, \alpha \in [a\,,b] \quad ((f''(\alpha) + f(\alpha)) \sin(\alpha - a) = \frac{1}{\pi} \cdot (f(b) + f(a))\,.$$

Comme $f(b) + f(a) > 0$ et $[\alpha - a] \in [0,\pi]$ on a : $\sin(\alpha - a) > 0$ et $f''(\alpha) + f(\alpha) > 0$ ■

6.11à 6.19 Dans les exercices suivants, on demande de calculer la limite, si elle existe, de la suite $\{U_n\}$:

6.11 $$U_n = \sum_{p=1}^{n} \frac{n}{n^2 + p^2}$$

6.12 $$U_n = \frac{1}{n} \sqrt[n]{(n+1)(n+2)\ldots(n+n)}$$

6.13 $$U_n = \frac{1}{n}\left(\sqrt{\frac{1}{n}} + \sqrt{\frac{2}{n}} + \ldots + \sqrt{\frac{n}{n}}\right)$$

6.14 $$U_n = \frac{1}{n^2} \sum_{p=0}^{n} \sqrt{p\,(n-p)}\,.$$

6.15 $$U_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \sin\frac{k\pi}{n}\,.$$

6.16 $$U_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2} \sin\frac{k\pi}{n+1}\,.$$

6.17 $$U_n = \sqrt[n]{\frac{(a+1)(a+2)\ldots(a+n)}{n!}} \quad \text{où } a > 0$$

6.18 $$U_n = \frac{1^\alpha + 2^\alpha + \ldots + n^\alpha}{n^{\alpha+1}} \quad \text{où } \alpha > 0$$

6.19 $$U_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n} \sqrt[n]{p^k \cdot q^{n-k}}$$

où p et q sont des entiers naturels non nuls.

Solutions

Dans chacun des exercices ci-dessus, il faudrait trouver une fonction f et un intervalle [a,b] tels que f soit continue sur [a,b] et que la suite $\{U_n\}$ puisse s'écrire sous l'une des 2 formes :

$$u_n = \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k\,.\,(\frac{b-a}{n})\right) \quad \text{ou} \quad u_n = \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^{n} f\left(a + k\,.\,(\frac{b-a}{n})\right)$$

Nous savons que, dans ce cas, puisque f est continue sur [a,b] ; la suite $\{U_n\}$ est alors convergente et tend vers la valeur moyenne de f sur [a,b] :

$$\lim_{n\to\infty} U_n = \mu = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx.$$

6.11 Solution

$$U_n = \sum_{p=1}^{n} \frac{n}{n^2+p^2} = \frac{1}{n}\cdot\sum_{p=1}^{n}\frac{n^2}{n^2+p^2}.$$

$$= \frac{1}{n}\cdot\sum_{p=1}^{n}\frac{1}{1+\frac{p^2}{n^2}} = \frac{1}{n}\cdot\sum_{p=1}^{n}\frac{1}{1+\left(\frac{p}{n}\right)^2}$$

On pose alors $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ sur $[a,b] = [o,1]$.

On a bien : $U_n = \dfrac{1}{n}\cdot\displaystyle\sum_{p=1}^{n} f\left(\frac{p}{n}\right)$ où $\dfrac{p}{n} = 0 + p\cdot\dfrac{(1-0)}{n}$.

f est bien une fonction définie et continue donc intégrable sur l'intervalle [0,1]. Donc la suite $\{U_n\}$, ainsi définie, est convergente et tend vers la valeur moyenne de f sur [0,1].

$$\lim_{n\to+\infty} U_n = \frac{1}{1-0}\cdot\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = [\text{Arctg } x]_0^1 = \text{Arctg } 1 = \frac{\pi}{4}.$$

■

6.12 Solution

$$U_n = \frac{1}{n}\sqrt[n]{(n+1)(n+2)\dots(n+n)}.$$

$$= \sqrt[n]{\frac{(n+1)(n+2)\dots(n+n)}{n^n}} = \sqrt[n]{\left(\frac{n+1}{n}\right)\left(\frac{n+2}{n}\right)\dots\left(\frac{n+n}{n}\right)}$$

On ne pourra pas écrire U_n sous la forme d'une somme.

Mais, pour détourner le problème, on définit une nouvelle suite $\{V_n\}$ par :

$$V_n = \text{Log } U_n = \frac{1}{n}\left[\text{Log}\left(\frac{n+1}{n}\right) + \text{Log}\left(\frac{n+2}{n}\right) + \dots + \text{Log}\left(\frac{n+n}{n}\right)\right].$$

$$= \frac{1}{n}\left[\text{Log}\left(1+\frac{1}{n}\right) + \text{Log}\left(1+\frac{2}{n}\right) + \dots + \text{Log}\left(1+\frac{n}{n}\right)\right].$$

On pose alors f(x) = Log (1+x) et [a,b] = [0,1].

f est définie et continue donc intégrable sur [0,1]. Donc la suite $\{V_n\}$ est convergente et tend vers la valeur moyenne de f sur [0,1]. Ainsi :

$$\lim_{n\to+\infty} V_n = \frac{1}{1-0}\int_0^1 \text{Log}(1+x)\,dx = 2\,\text{Log } 2 - 1.$$

La fonction exponentielle étant continue, la suite $\{U_n\}$ est également convergente et tend vers $e^{2\,\mathrm{Log}\,2-1} = \frac{4}{e}$. . ■

6.13 Solution

$$U_n = \frac{1}{n}\left(\sqrt{\frac{1}{n}} + \sqrt{\frac{2}{n}} + \dots + \sqrt{\frac{n}{n}}\right).$$

Il suffit de poser $f(x) = \sqrt{x}$ et $[a,b] = [0,1]$.
f étant continue sur $[0,1]$, $\{U_n\}$ est convergente et on a :

$$\lim_{n \to +\infty} U_n = \frac{1}{1-0}\int_0^1 \sqrt{x}\,dx = \frac{2}{3}.$$

■

6.14 Solution

$$U_n = \frac{1}{n^2}\sum_{p=1}^{n} \sqrt{p\,(n-p)} = \frac{1}{n}\sum_{p=1}^{n} \frac{1}{n}\sqrt{p(n-p)}\,.$$

$$= \frac{1}{n}\cdot\sum_{p=1}^{n}\sqrt{\frac{p\,(n-p)}{n^2}} = \frac{1}{n}\cdot\sum_{p=1}^{n}\sqrt{\frac{p}{n}\left(1-\frac{p}{n}\right)}$$

IL suffit alors de poser $f(x) = \sqrt{x\,(1-x)}$ et $[a,b] = [0,1]$
f étant continue sur $[0,1]$, la suite $\{U_n\}$ est convergente et on a :

$$\lim_{n \to +\infty} U_n = \frac{1}{1-0}\int_0^1 \sqrt{x\,(1-x)}\,dx = \frac{\pi}{8}.$$

6.15 Solution

$$U_n = \frac{1}{n}\cdot\sum_{k=1}^{n} \sin\frac{k\pi}{n}.$$

Dans cet exemple, on a deux choix possibles ; en posant
$f_1(x) = \sin \pi x$ et $I_1 = [0, 1]$, ou encore :

$f_2(x) = \sin x$ et $I_2 = [0, \pi]$

Naturellement, d'après l'unicité de la limite, les deux choix conduisent au même résultat. f_1 (resp. f_2) est continue sur I_1 (resp. sur I_2) donc la suite $\{U_n\}$ est convergente et on a :

$$\lim_{n \to +\infty} U_n = \frac{1}{1-0}\int_0^1 \sin \pi x\,dx = \frac{1}{\pi-0}\int_0^{\pi} \sin x\,dx = \frac{2}{\pi}.$$

■

6.16 Solution

$$U_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2} \cdot \sin\frac{k\pi}{n+1}.$$

On ne pourra pas trouver de fonction f telle que $U_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(a + k \cdot \frac{b-a}{n}\right)$.

ou encore $U_n = \frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n+1} f\left(a + k \cdot \frac{(b-a)}{n+1}\right)$.

C'est pour cela qu'on va introduire une petite rectification en définissant une nouvelle suite $\{V_n\}$ par :

$$V_n = \left(\frac{n}{n+1}\right)^2 \cdot U_n = \frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n+1} \cdot \sin\frac{k\pi}{n+1}.$$

qu'on peut écrire encore : $V_n = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} \frac{k}{n+1} \cdot \sin\frac{k\pi}{n+1}$.

puisque le terme en $k = 0$ n'intervient pas.

En posant $n' = n + 1$ $\quad V_{n+1} = V_{n'} = \frac{1}{n'}\sum_{k=0}^{n-1} \frac{k}{n'} \cdot \sin\frac{k\pi}{n'}$.

On considère alors la fonction f définie par: $f(x) = x.\sin\pi x$ et l'intervalle $[a,b] = [0,1]$. f étant continue sur $[0,1]$, la suite $\{V_n\}$ est alors convergente et tend vers la valeur moyenne de f sur $[0,1]$:

$$\lim_{n\to+\infty} V_n = \frac{1}{1-0}\int_0^1 x.\sin\pi x\, dx = \frac{1}{\pi}.$$

D'autre part : $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = \lim\limits_{n\to+\infty} V_n = \frac{1}{\pi}$. ■

6.17 Solution

$$U_n = \sqrt[n]{\frac{(a+1)(a+2)\ldots(a+n)}{n!}} \qquad \text{où } a > 0$$

$$U_n = \sqrt[n]{\left(\frac{a+1}{1}\right)\left(\frac{a+2}{2}\right)\ldots\left(\frac{a+n}{n}\right)}$$

$$= \sqrt[n]{\left(1+\frac{a}{1}\right)\left(1+\frac{a}{2}\right)\ldots\left(1+\frac{a}{n}\right)}$$

On considère la suite $\{U_n\}$ définie par : $V_n = \text{Log}\, U_n$

$$V_n = \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^{n} \text{Log}\left(1+\frac{a}{k}\right).$$

On ne pourra pas trouver de subdivision $\{x_k\}$, de "pas" égal, de l'intervalle $[0,1]$ en prenant $f(x) = \text{Log}\,(1 + ax)$

ou $\quad f(x) = \text{Log}\,(1 + \frac{a}{x})$

Donc il faut chercher une autre méthode.
Or; on a vu dans le chapitre II (sur les suites) que si une suite $\{U_n\}$ converge vers une limite ℓ alors sa moyenne géométrique converge également vers ℓ .

$$S_n \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} \ell \quad \Rightarrow \quad \sqrt[n]{S_1 S_2 \ldots S_n} \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} \ell$$

Comme $\left(1+\frac{a}{k}\right) \underset{k \to +\infty}{\longrightarrow} 1$ donc la suite $\{U_n\}$ est convergente et $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = 1$ ■

6.18 Solution

$$U_n = \frac{1^\alpha + 2^\alpha + \ldots + n^\alpha}{n^{\alpha+1}} \qquad \alpha > 0$$

$$U_n = \frac{1}{n}\left[\frac{1^\alpha}{n^\alpha} + \frac{2^\alpha}{n^\alpha} + \ldots + \frac{n^\alpha}{n^\alpha}\right].$$

$$= \frac{1}{n}\left[\left(\frac{1}{n}\right)^\alpha + \left(\frac{2}{n}\right)^\alpha + \ldots + \left(\frac{n}{n}\right)^\alpha\right] = \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{k}{n}\right)^\alpha .$$

On pose $f(x) = x^\alpha$ et $[a,b] = [0,1]$. f est définie et continue donc intégrable sur $[a,b]$.
La suite $\{U_n\}$ est convergente et on a :

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = \frac{1}{1-0} \int_0^1 x^\alpha \, dx = \frac{1}{\alpha+1}.$$

■

6.19 Solution

Il faut distinguer 2 cas possibles :

1er cas : $p = q$ alors $U_n = \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=0}^{n} q \frac{(n+1)}{n}$, lonc la suite $\{U_n\}$ est convergente et tend vers q lorsque n tend vers l'infini.

2ème cas : Supposons $p \neq q$ donc $\frac{p}{q} \neq 1$. On a :

$$U_n = \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=0}^{n} \sqrt[n]{p^k . q^{n-k}} .$$

$$U_n = \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=0}^{n} \sqrt[n]{\left(\frac{p}{q}\right)^k . q^n} = \left(\frac{q}{p}\right) . \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{p}{q}\right)^{\frac{k}{n}} .$$

$$= \left(\frac{q}{n}\right) + \left(\frac{q}{n}\right) . \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{p}{q}\right)^{\frac{k}{n}} = \left(\frac{q}{n}\right) + q . V_n .$$

où $\quad V_n = \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{p}{q}\right)^{\frac{k}{n}} .$

Posons $K = \left(\frac{p}{q}\right)$ $f(x) = K^x$ et $[a,b] = [0,1]$.

La fonction f est définie et continue donc intégrable sur $[0,1]$. Donc la suite $\{V_n\}$ est convergente et on a :

$$\lim v_n = \frac{1}{1-0} \cdot \int_0^1 K^x \, dx = \int_0^1 e^{x \operatorname{Log} K} \, dx = \frac{K-1}{\operatorname{Log} K}$$

On en déduit que $\{U_n\}$ est convergente et on a :

$$\lim_{n \to \infty} u_n = q \cdot \lim V_n = q \cdot \frac{\left(\frac{p}{q}\right) - 1}{\operatorname{Log}\left(\frac{p}{q}\right)} = \frac{p-q}{\operatorname{Log} p - \operatorname{Log} q}.$$

■

6.20 On considère la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$S_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{\sqrt{n^2-1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2-2^2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n^2-(n-1)^2}}.$$

a) Peut-on utiliser la formule de la moyenne pour déterminer la limite (si elle existe) de la suite $\{S_n\}$?

b) On considère la fonction définie sur $[0,1[$ par : $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$S_n - \frac{1}{n} f\left(1 - \frac{1}{n}\right) < \int_0^{1-\frac{1}{n}} f(x)\,dx < S_n - \frac{1}{n}.$$

c) En déduire que $\{S_n\}$ est convergente et calculer sa limite.

Solution

On considère la suite :

$$S_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{\sqrt{n^2-1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2-2^2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n^2-(n-1)^2}}.$$

a) $$S_n = \frac{1}{n}\left[1 + \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{1}{n}\right)^2}} + \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{2}{n}\right)^2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{n-1}{n}\right)^2}}\right]$$

donc $$S_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{k}{n}\right)^2}}.$$

On pose $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ avec $[a,b] = [0,1]$.

On ne peut pas appliquer la formule de la valeur moyenne car la fonction f n'est pas continue en $x_o = 1$; elle n'est même pas définie en $x_o = 1$.

b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrons que :

$$S_n - \frac{1}{n} f\left(1 - \frac{1}{n}\right) < \int_0^{1-\frac{1}{n}} f(x)\, dx < S_n - \frac{1}{n} .$$

Considérons la subdivision de l'intervalle [0,1]. définie par :

$$\sigma = \{x_o = 0 \ , \ x_1 \ , x_2 \ , \ldots , x_n = 1\} \quad \text{où} \quad x_k = \frac{k}{n} .$$

f étant strictement croissante sur [0,1]. Pour tout $k \in \{0, 1, 2, ..., n-2\}$, on a :

$$\forall x \in \,]x_k , x_{k+1}[\qquad f(x_k) < f(x) < f(x_{k+1})$$

donc : $$\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x_k) \,.\, dx < \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x) \,.\, dx < \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x_{k+1}) \,.\, dx .$$

Ce qui donne :

$$(x_{k+1} - x_k) \,.\, f(x_k) < \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)\ dx < (x_{k+1} - x_k) \,.\, f(x_{k+1}) .$$

En faisant varier k dans $\{0,1,2..., n-2\}$, puis en faisant la somme membre à membre, il s'en suit :

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-2} f(x_k) < \int_0^{x_{n-1}} f(x)\, dx < \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-2} f(x_{k+1}) .$$

donc : $$S_n - \frac{1}{n} \,.\, f(x_{n-1}) < \int_0^{\frac{(n-1)}{n}} f(x)\ dx < \frac{1}{n} \,.\, \sum_{k=1}^{n-1} f(x_k) .$$

d'où : $$S_n - \frac{1}{n} f\left(1 - \frac{1}{n}\right) < \int_0^{1-\frac{1}{n}} f(x)\, dx < S_n - \frac{1}{n} .$$

c) D'après l'inégalité précédente on peut déduire que :

$$\frac{1}{n} + \int_0^{1-\frac{1}{n}} f(x)\,dx < S_n < \frac{1}{n} f\left(1-\frac{1}{n}\right) + \int_0^{1-\frac{1}{n}} f(x)\,dx .$$

qu'on simplifie en écrivant : $A_n < S_n < B_n$, où A_n et B_n sont respectivement les membres de gauche et de droite de l'inégalité ci-dessus.

Or : $\lim\limits_{n \to +\infty} A_n = \lim\limits_{n \to +\infty} \int_0^{1-\frac{1}{n}} f(x)\,dx = \lim\limits_{n \to +\infty} \text{Arcsin}\left(1-\frac{1}{n}\right) = \frac{\pi}{2}$.

D'autre part : $\frac{1}{n} \cdot f\left(1-\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{\sqrt{n^2 - \left(\frac{n-1}{n}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2n-1}} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$.

donc $\lim\limits_{n \to +\infty} A_n = \frac{\pi}{2} = \lim\limits_{n \to +\infty} B_n$.

Finalement, d'après le théorème de comparaison des suites, $\{U_n\}$ est convergente et tend vers $\frac{\pi}{2}$. ■

6.21 Soit f une fonction continue sur [0,1]. et telle que $\forall\, x \in [a,b]$ $f(a+b-x) = f(x)$

a) Montrer que : $\int_a^b t \cdot f(t)\,dt = \frac{a+b}{2} \int_a^b f(t)\,dt$.

b) En déduire la valeur de l'intégrale

$$I = \int_0^{\pi} \frac{x \cdot \sin x}{1+\cos^2 x}\,dx .$$

Solution

a) On fait le changement de variable $t = a + b - x$.

$dt = -dx$. Ainsi comme pour tout $x \in [a,b]$: $f(a+b-x) = f(x)$, on a :

$$\int_a^b t \cdot f(t)\,dt = \int_b^a (a+b-x) \cdot f(x) \cdot (-dx) = \int_a^b (a+b) f(x)\,dx - \int_a^b x\,(f(x)\,dx .$$

Ce qui donne : $2 \cdot \int_a^b t \cdot f(t)\, dt = (a+b) \cdot \int_a^b f(x)\, dx$.

Ou encore : $\int_a^b t \cdot f(t)\, dt = \frac{a+b}{2} \cdot \int_a^b f(t)\, dt$.

b) D'après ce qui précède : $I = \int_0^{\pi} \frac{x \sin x\, dx}{1+\cos^2 x} = \frac{\pi + 0}{2} \cdot \int_0^{\pi} \frac{\sin x\, dx}{1+\cos^2 x}$.

En faisant un nouveau changement de variable : $u = \cos x$. Donc : $du = -\sin x\, dx$

D'où $I = \frac{\pi}{2} \cdot \int_1^{-1} \frac{-du}{1+u^2} = \frac{\pi}{2} \int_{-1}^{1} \frac{du}{1+u^2}$.

$= \frac{\pi}{2} [\text{Arctg } u]_{-1}^{1} = \frac{\pi}{2} \times 2 = \pi$. ■

6.22

On considère l'intégrale $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{\sin x}}{\sqrt{\sin x} + \sqrt{\cos x}}\, dx$.

En faisant un changement de variable convenable, calculer la valeur de l'intégrale I (On ne demande pas de chercher une primitive)

Solution

Il suffit de choisir le changement de variable qui transforme le sinus en cosinus.

Posons $x = \frac{\pi}{2} - t$ donc $dx = -dt$ et on a :

et $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{\sin x}\, dx}{\sqrt{\sin x} + \sqrt{\cos x}} = \int_{\pi}^{0} \frac{\sqrt{\cos t}\ (-dt)}{\sqrt{\cos t} + \sqrt{\sin t}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{\cos t}\, dt}{\sqrt{\sin t} + \sqrt{\cos t}} = J$

D'autre part : $I + J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 \cdot dx = \frac{\pi}{2}$. D'où $I = J = \frac{\pi}{4}$. ■

6.23

Soit f une fonction continue sur $[a,b]$. On considère u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I tel que u(I) et v(I) soient inclus dans $[a,b]$.
On définit la fonction G sur I par :

$$\forall x \in I \qquad G(x) = \int_{u(x)}^{v(x)} f(t)\, dt\,.$$

1) Exprimer G à l'aide de u, v et F, où F est la fonction définie sur $[a,b]$ par :

$$F(y) = \int_a^y f(t)\, dt\,.$$

2) En déduire que G est dévirable sur I et calculer $G'(x)$ pour $x \in I$:

3) Calculer la dérivée de la fonction

$$G(x) = \int_x^{x^2} \frac{dt}{1+t^2}\,.$$

Solution

a) D'après la relation de Chasles, on a

$$G(x) = \int_{u(x)}^{a} f(t)\, dt + \int_a^{v(x)} f(t)\, dt.$$

donc $G(x) = \int_a^{v(x)} f(t)\, dt - \int_a^{u(x)} f(t)\, dt.$ d'où $G(x) = F(v(x)) - F(u(x))$.

b) Les fonctions u, v sont dérivables sur I par hypothèse. La fonction F est dérivable sur $[0,1]$ car f est continue. Donc G, qui est composée de u, v et F est aussi dérivable pour tout $x \in I$ et :

$$G'(x) = [F(v(x))]' - [F(u(x))]'$$

donc : $G'(x) = v' . F'(v(x) - u'(x) . F'(u(x)).$

d'où : $G'(x) = v'(x) . f(v(x) - u'(x) . f(u(x)).$

c) soit $G(x) = \int_x^{x^2} \frac{dt}{1+t^2}\,.$

$$G'(x) = 2x \,.\, \frac{1}{1+x^4} - 1 \,.\, \frac{1}{1+x^2}\,. \qquad \text{d'où} \qquad G'(x) = \frac{2x}{1+x^4} - \frac{1}{1+x^2}\,.$$

■

6.24 Soit f une fonction continue sur $[o,\pi]$ telle que : $\int_0^{\pi} f(t) \sin t \, dt = 0$

Montrer qu'il existe un réel $\alpha \in \,]o,\pi[$ tel que $f(\alpha) = 0$.

Solution

Considérons la fonction F définie sur $[o,\pi]$ par : $F(x) = \int_0^{x} f(t) \sin t \, dt$.

F est définie et continue sur $[o,\pi]$ et comme f est continue, F est dérivable sur $]0,\pi[$.
On a $F(0) = 0$ et d'après l'hypothèse $F(\pi) = 0$.
Donc F vérifie les hypothèses du théorème de Rolle.
Par conséquent il existe un réel $\alpha \in \,]o,\pi[$ tel que $F'(\alpha) = 0$. C'est-à-dire $f(\alpha) \, . \, \sin \alpha = 0$. Or $\alpha \in \,]o,\pi[$ donc $\sin \alpha \neq 0$. Et par suite $f(\alpha) = 0$. ■

6.25 On considère les deux intégrales définies pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$A = \int_0^x e^t \cos 2t \, dt \quad \text{et} \quad B = \int_0^x e^t \sin 2t \, dt .$$

1) Etablir deux relations entre A et B puis en déduire les valeurs de A et de B.

2) On pose : $I = \int_0^x e^t \cos^2 t \, dt$ et $J = \int_0^x e^t \sin^2 t \, dt$.

- Calculer $I + J$ et $I - J$
- En déduire les valeurs de I et de J.

Solution

1) On fait une intégration par parties de A et de B , on trouve :

$$\begin{cases} A = \dfrac{e^x \sin 2x}{2} - \dfrac{B}{2} & (1) \\[2ex] B = \dfrac{1 - e^x \cos 2x}{2} + \dfrac{A}{2} & (2) \end{cases}$$

En substituant B dans A puis en résolvant l'équation, on en tire :

$$\begin{cases} A = \dfrac{1}{5} \, . \, (2 e^x \sin 2x + e^x \cos 2x - 1) \, . \\[2ex] B = \dfrac{1}{5} \, . \, (((2 + e^x \sin 2x - 2 e^x \cos 2x) \end{cases}$$

2) En utilisant la linéarité de l'intégrale , on a :

$$I + J = \int_0^x e^t(\cos^2 t + \sin^2 t)\,dt = \int_0^x e^t\,dt = e^x - 1\ .$$

$$I - J = \int_0^x e^t(\cos^2 t - \sin^2 t)\,dt = \int_0^x e^t \cos 2t\ dt = A\ .$$

où A est l'intégrale calculée dans la question 1°. D'où $2I = A + e^x - 1$

Ce qui donne : $I = (A + e^x - 1)/2$ et $J = (e^x - 1 - A)/2$. ■

6.26 On définit la fonction F par : $F(x) = \displaystyle\int_x^{2x} \frac{dt}{\sqrt{1+t^4}}$.

a) Déterminer le domaine de définition de F
b) Etudier la parité de F et calculer les limites aux bornes.
c) En utilisant la relation de Chasles, calculer F'(x).
d) Dresser le tableau de variation de F et donner l'allure de sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

(on cherchera à majorer $F\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$)

Solution

a) La fonction f définie par $f(t) = \dfrac{1}{\sqrt{1+t^4}}$ est définie et continue sur tout intervalle fermé borné de $\mathbb{R}$. Donc elle est intégrable sur tout intervalle fermé d'éxtrémités x et 2 x, pour tout $x \in \mathbb{R}$. Donc F est définie sur tout $\mathbb{R}$. D'où $D_F = \mathbb{R}$.

b) Calculons $F(-x) = \displaystyle\int_{-x}^{-2x} \frac{dt}{\sqrt{1+t^4}}$.

Pour cela, faisons le changement de variable $t = -u$ donc $dt = -du$

et $F(-x) = \displaystyle\int_x^{2x} \frac{-du}{\sqrt{1+u^4}} = -F(x)$.

Donc F est impaire. Il suffit alors de l'étudier sur l'intervalle $[0, +\infty[$.
Il est clair que $F(o) = 0$ Cherchons la limite de F au voisinage de $+\infty$. On a :

$\forall\ t \in \mathbb{R}\quad 1 + t^4 > t^4$ donc $\forall\ t \in \mathbb{R}\quad 0 < \dfrac{1}{\sqrt{1+t^4}} < \dfrac{1}{t^2}.$

donc pour tout $x \in \mathbb{R}^*_+\ :\ 0 < F(x) < \displaystyle\int_x^{2x} \frac{dt}{t^2}.$ (*)

Or $\displaystyle\int_x^{2x} \frac{dt}{t^2} = -\frac{1}{2x} + \frac{1}{x} \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0.$ Donc $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} F(x) = 0$

c) On a déjà vu que si $G(x) = \displaystyle\int_a^{u(x)} f(t)\,dt$ et si f est une fonction continue et u dérivable, la fonction G est dérivable et $G'(x) = u'(x) \cdot f(u(x))$.

D'après la relation de Chasles on peut écrire F(x) :

$$F(x) = \int_0^{2x} \frac{dt}{\sqrt{1+t^4}} - \int_0^{x} \frac{dt}{\sqrt{1+t^4}}.$$

donc :

$$F'(x) = \frac{2}{\sqrt{1+16x^4}} - \frac{1}{\sqrt{1+x^4}}.$$

En réduisant au même dénominateur, puis en multipliant par la quantité conjuguée on trouve :

$$F'(x) = \frac{3.(1-2x^2)(1+2x^2)}{\sqrt{1+16x^4}\,.\,\sqrt{1+x^4}\,[\sqrt{1+16x^4} + 2.\sqrt{1+x^4}\,]}$$

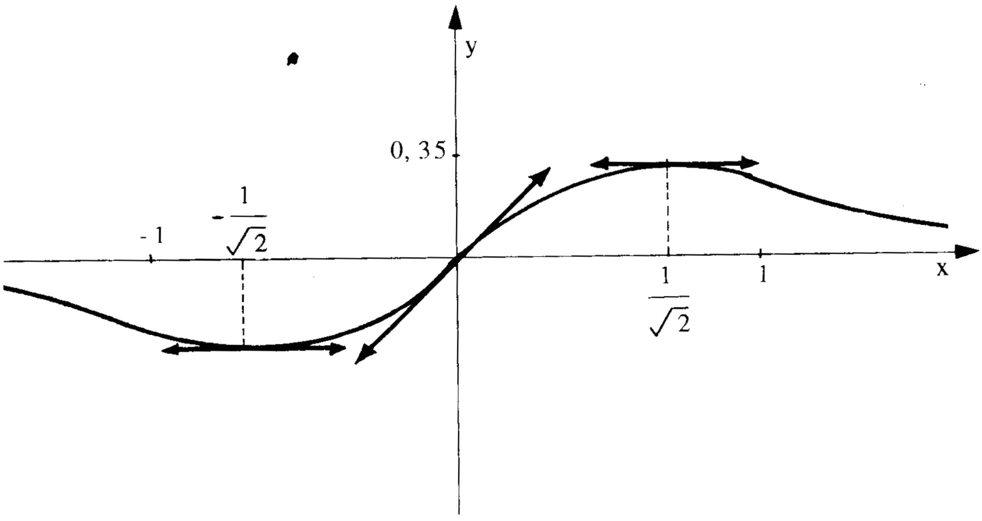
La dérivée s'annule pour les deux valeurs $\pm 1/\sqrt{2}$.

On en déduit le tableau de variation suivant ; sur $[0,+\infty[$:

x	$-\infty$		$1/\sqrt{2}$		$+\infty$
F' (x)	1	+	0	−	
F (x)	0	↗	$F(1/\sqrt{2})$	↘	0

D'après l'inégalité (*) on peut calculer une majoration de $F\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$

$$F\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) < \int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\sqrt{2}} \frac{dt}{t^2} = \frac{\sqrt{2}}{4} \approx 0,35.$$



6.27 Soit f une fonction de classe C^1 sur $[0,a]$, $a>0$. On suppose que f est strictement croissante de $[0,a]$ sur $[0,b]$ avec $f(0) = 0$ et $f(a) = b$. Posons $g = f^{-1}$

1) Montrer que : $\forall\ \alpha \in [o,a] \quad \exists\ \beta \in [o,b]$ tel que :

$$\int_0^{\alpha} x\, f'(x)\, dx = \int_0^{\beta} g(x)\, dx .$$

En déduire que $$\alpha\beta = \int_0^{\alpha} f(x)\, dx + \int_0^{\beta} g(x)\, dx .$$

2) Montrer que $\forall\ \alpha \in [o,a] \quad \forall\ \beta' \in [o,b]$

$$\alpha\beta' \leq \int_0^{\alpha} f(x)\, dx + \int_0^{\beta} g(x)\, dx . \qquad (*)$$

3) En étudiant le sens de variation des fonctions définies par

$$h(t) = \alpha\, t - \int_0^{t} g(x)\, dx \quad \text{et} \quad k(t) = \beta t - \int_0^{t} f(x)\, dx$$

définies respectivement sur $[o,\beta]$ et $[o,\alpha]$, retrouver la relation (*)

4) Soient p et q deux réels strictement supérieurs à 1

tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ Déduire de ce qui précède que :

$$\forall\ (\alpha , \beta') \in \mathbb{R}^2_+ \quad \alpha\, \beta' \leq \frac{\alpha^p}{p} + \frac{\beta'^q}{q}$$

Solution

1) Soit $\alpha \in [o,a]$. Prenons $\beta = f(\alpha)$ et faisons le changement de variable $x = f(t)$

dans l'intégrale $I = \int_0^\beta g(x)\,dx$

On a $dx = f'(t)\,dt$. Donc : $I = \int_0^\beta g(x)\ dx = \int_0^\alpha g(f(t))\,.\,f'(t)\,dt = \int_0^\alpha t\,.\,f'\ (t)\,dt$.

Ce qui montre le résultat puisque $(g \circ f)(t) = t$

D'autre part :

$$\int_0^\alpha f(x)\,dx + \int_0^\beta g(x)\,dx = \int_0^\alpha (f(x) + x\,f'(x))\,dx = \int_0^\alpha (x\,f(x))'\ dx = [x\,f(x)]_0^\alpha = \alpha\beta .$$

2) Posons $\alpha' = g(\beta')$; on a : $\alpha \in [o,a]$.

__1er cas__ : $\alpha' \leq \alpha$. En utilisant la seconde égalité domontrée dans la question 1º) , on peut écrire :

$$J = \int_0^\alpha f(x)\,dx + \int_0^\beta g(x)\,dx = \int_0^\alpha f(x)\,dx + \alpha'\beta' - \int_0^\alpha f(x)\,dx$$

$$= \int_{\alpha'}^\alpha f(x)\ dx + \alpha'\beta' \ \geq \int_{\alpha'}^\alpha f(\alpha')\ dx + \alpha'\beta'$$ puisque f est supposée croissante.

Ce dernier membre peut encore s'écrire :

$(\alpha - \alpha')\,f(\alpha') + \alpha'\beta' = \alpha\,\beta' - \alpha'\,\beta' + \alpha'\beta' = \alpha\beta'$ car $\beta' = f(\alpha')$.

Ce qui montre la relation (*).

__2ème cas__ : $\alpha' > \alpha$:

$$J = \alpha\beta - \int_0^\beta g(x)\,dx + \int_0^{\beta'} g(x)\,dx\ . = \alpha\beta + \int_\beta^{\beta'} g(x)\,dx \ \geq \alpha\beta + \int_\beta^{\beta'} g(\beta)\,dx$$

car $\beta' > \beta$ et g croissante .

Ainsi $J \geq \alpha\beta + (\beta' - \beta)\ g(\beta) = \beta'\alpha$ car $g(\beta) = \alpha$

Ce qui montre la relation (*) dans ce 2ème cas.

3) $h(t) = \alpha t - \int_0^t g(x)\,dx$. Donc $h'(t) = \alpha - g(t)$.

Or f est croissante, donc : $\forall t \in [o,b] \quad g(t) \leq g(\beta)$

Comme $g(\beta) = \alpha$, ceci montre que h' est positive sur $[o,\beta]$

donc : $\forall \beta' \leq \beta \quad h(\beta') \leq h(\beta)$ C'est-à-dire :

$$\alpha\beta' - \int_0^{\beta'} g(x)\,dx \leq \alpha\beta - \int_0^{\beta} g(x)\,dx \quad \text{d'où :} \quad \alpha\beta' - \int_0^{\beta'} g(x)\,dx \leq \int_0^{\alpha} f(x)\,dx .$$

Ainsi : $\forall \beta' \in [o, \beta] \quad \alpha\beta' \leq \int_0^{\alpha} f(x)\,dx + \int_0^{\beta} g(x)\,dx$.

Ce qui montre la relation (*) dans le cas $\beta' \leq \beta$ (c'est-à-dire $\alpha' \leq \alpha$)

En utilisant maintenant la fonction k, acec un raisonnement analogue, on montre la relation (*) dans le cas $\alpha' > \alpha$.

4) Posons $f(x) = x^{p-1}$. f vérifie les hypothèses ci dessus.

Comme $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ on a $pq = p + q$. .

D'autre part, comme $(p-1)(q-1) = pq - (p+q) + 1 = 1$,

La fonction réciproque de f n'est autre que la fonction g définie par : $g(x) = x^{q-1}$

$$\int_0^{\alpha} x^{p-1}\,dx = \frac{\alpha^p}{p} \quad \text{et} \quad \int_0^{\beta'} x^{q-1}\,dx = \frac{\beta'^q}{q} .$$

D'après la relation (*) on a : $\alpha\beta' \leq \frac{\alpha^p}{p} + \frac{\beta'^q}{q}$.

Ceci nous donne une autre démonstration du lemme qui permet de démontrer l'inégalité de Hölder (cf cours). ■

6.28 Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on définit :

$$I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\,dx \quad \text{et} \quad S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k} \quad , \quad S_o = 0$$

a) Calculer I_o

b) Montrer que pour tout $n \geq 1$ $\quad I_n + I_{n+1} = \frac{1}{n+1}$ et $\quad I_n = (-1)^n (I_o + S_n)$

c) Montrer que si $n \geq 1$ on a : $\frac{1}{2(n+1)} \leq I_n \leq \frac{1}{(n+1)}$.

d) déduire de ce qui précède la limite de la suite $\{S_n\}$

Solution

a) $I_o = \int_0^1 \frac{dx}{1+x} = [\text{Log}\,(1+x)]_0^1 = \text{Log}\,2.$

b) pour tout $n \geq 1$ on a :

$$I_n + I_{n+1} = \int_0^1 \frac{x^n + x^{n+1}}{1+x}\,dx = \int_0^1 x^n\,dx = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{n+1}.$$

On déduit : $I_n = \frac{1}{n} - I_{n-1}$.

$$I_{n-1} = \frac{1}{n-1} - I_{n-2}.$$

....

$$I_1 = \frac{1}{1} - I_o$$

En multipliant chaque I_{n-k} par $(-1)^k$ puis en faisant la somme membre à membre, on trouve après simplifications :

$$I_n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{n-k} \cdot \frac{1}{k} - (-1)^{n-1} \cdot I_o.$$

Comme $(-1)^{-k} = (-1)^k$, il vient :

$$I_n = (-1)^n \cdot \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \cdot \frac{1}{k}. \qquad + (-1)^n \cdot I_o.$$

d'où $$I_n = (-1)^n \cdot (I_o + S_n).$$

c) Pour tout $x \in [o,1]$ on a $\frac{1}{2} \leq \frac{1}{1+x} \leq 1.$

D'où en multipliant par x^n qui est positif, il vient :

pour tout $x \in [o,1]$: $\frac{x^n}{2} \leq \frac{x^n}{1+x} \leq x^n.$

Puis en intégrant les trois membres on trouve, d'après la croissance de l'intégrale :

$$\frac{1}{2} \cdot \int_0^1 x^n\,dx \leq I_n \leq \int_0^1 x^n\,dx.$$

Ce qui donne $\frac{1}{2(n+1)} \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}.$

d) Lorsque n tend vers $+\infty$.., I_n tend vers O d'après le théorème de comparaison des suites. Et d'après la question (b) la suite $\{S_n\}$ est convergente et tend vers $-I_o = -\text{Log}\,2$. ■

6.29 On considère l'intégrale $I_n = \displaystyle\int_0^1 x^n \sqrt{1-x}\,dx$

1) Etablir une relation de récurrence entre I_n et I_{n-1}, $n \in \mathbb{N}^*$
2) Calculer I_0 puis en déduire la valeur de I_n en fonction de n
3) En faisant un changement de variable et en utilisant la formule du binôme, donnez une autre expression de I_n .

Que peut-on en conclure ?

Solution

1) On fait une intégration par parties, en posant :

$$u = x^n \qquad \text{donc} \qquad u' = n \,.\, x^{n-1}$$

$$V' = \sqrt{1-x} \qquad \text{donc} \qquad V = -\frac{2}{3}(1-x)^{\frac{3}{2}} .$$

$$I_n = \left[-\frac{2}{3}x^n \,.\, (1-x)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 + \frac{2}{3}.n\int_0^1 x^{n-1}(1-x)^{\frac{3}{2}}\,dx.$$

$$I_n = 0 + \frac{2}{3}\,.\,n.\int_0^1 x^{n-1}(1-x)\sqrt{1-x}\;dx\,.$$

$$I_n = \frac{2n}{3}\,.\int_0^1 x^{n-1}\sqrt{1-x}\;dx - \frac{2n}{3}\int_0^1 x^n\sqrt{1-x}\;dx \quad \text{donc} \qquad I_n = \frac{2n}{3}\,.\,I_{n-1} - \frac{2n}{3}I_n\,.$$

En passant les I_n dans le membre de gauche, il vient après simplification :

$$I_n = \frac{2n}{2n+3}\,.\,I_{n-1}\,.$$

2) $$I_0 = \int_0^1 \sqrt{1-x}\;dx = \left[-\frac{2}{3}(1-x)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 = \frac{2}{3}$$

Ainsi $$I_n = \frac{2n}{2n+3}\cdot\frac{2n-2}{2n+1}\cdots\frac{4 \times 2}{7 \times 2} \times I_0\,.$$

d'où

$$I_n = \frac{2n\,(2n-2)\,\ldots \times 4 \times 2 \times 2}{(2n+3)\,(2n+1)\,\ldots \times 7 \times 5 \times 3}\,.$$

Ce qui donne : $$I_n = \frac{n\,!\,(n+1)\,!\;2^{2n+3}}{(2n+3)!}$$

3) Faisons, maintenant, le changement de variable : $t = 1 - x$ donc $x^n = (1-t)^n$ et $dx = -dt$

$$I_n = \int_0^1 (1-t)^n \cdot \sqrt{t}\, dt = \int_0^1 \left(\sum_{k=0}^{n} C_n^k \, (-1)^k \cdot t^{k+\frac{1}{2}} \right) dt$$

$$= \sum_{k=0}^{n} C_n^k \, (-1)^k \int_0^1 t^{k+\frac{1}{2}} \, dt .$$

$$= \sum_{k=0}^{n} C_n^k \, (-1)^k \left[\frac{t^{k+\frac{3}{2}}}{k+\frac{3}{2}} \right]_0^1 = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \, (-1)^k \frac{2}{2k+3} .$$

Conclusion : $$\sum_{k=0}^{n} C_n^k \, (-1)^k \frac{2}{2k+3} = \frac{n!\,(n+1)!\,2^{2n+3}}{(2n+3)!} \qquad \blacksquare$$

6.30

On considère l'intégrale $I_n = \int_0^x \frac{t^n e^{1-t}}{n!} dt$, $n \in \mathbb{N}^*$

1) Calculer I_1
2) Etablir une relation de récurrence entre I_n et I_{n-1} $(n \geq 2)$
3) Calculer I_n en fonction de n
4) Déterminer, pour n fixé, la limite de $I_n(x)$, lorsque x tend vers $+\infty$
5) On pose $J_n = I_n(1) = \int_0^1 \frac{t^n e^{1-t}}{n!} dt$.

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $0 \leq J_n \leq \frac{1}{n!}$

6) On pose $U_n = \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \right)$. Montrer, en utilisant le calcul de I_n que :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^* \qquad U_n \leq e \leq U_n + \frac{1}{n!} .$$

7) Calculer la limite de U_n quand n tend vers $+\infty$

Solution

1) Soit $I_n = \displaystyle\int_0^x \frac{t^n e^{1-t}}{n!}\,dt$. Calculons $I_1 = \displaystyle\int_0^x t e^{1-t}\,dt$.

On fait une intégration par parties :

$u = t$ donc $u' = 1$ et $v' = e^{1-t}$ donc $v = -e^{1-t}$

$$I_1 = \left[-t e^{1-t}\right]_0^x + \int_0^x e^{1-t}\,dt = -x e^{1-x} - e^{1-x} + e.$$

2) On fait une intégration par parties pour I_n en posant :

$$\begin{cases} u = \dfrac{t^n}{n!} & \text{donc} \quad u' = \dfrac{t^{n-1}}{(n-1)!} \\ v' = e^{1-t} & \text{donc} \quad v' = -e^{1-t} \end{cases}$$

$$I_n = \left[\frac{-t^n}{n!} e^{1-t}\right]_0^x + \int_0^x \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} e^{1-t}\,dt.$$

Ce qui donne : $\qquad I_n = I_{n-1} - \dfrac{x^n}{n!} e^{1-x} \qquad (*)$

3) En écrivant les (n-1) relations (*) puis en faisant la somme membre à membre, on trouve, après avoir simplifié et remplacé I_1 par la valeur trouvée au 1°) :

$$I_n = e - e^{1-x} \cdot \left[\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}\right] \qquad (**)$$

4) Sachant que l'exponentielle l'emporte sur la fonction puissance, n étant fixé, on a : $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} I_n(x) = e$

5) $J_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{t^n e^{1-t}}{n!}\,dt = I_n(1)$, on a évidemment $J_n \geq 0$.

Dans (*) si on prend x = 1

on aura $J_n = J_{n-1} - \dfrac{1}{n!} \geq 0$ donc $0 \leq J_{n-1} \leq \dfrac{1}{n!} \leq \dfrac{1}{(n-1)!}$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$

d'où $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $\quad 0 \leq J_n \leq \dfrac{1}{n!}$

6) Si on prend x = 1 dans (**) on aura $J_n = e - U_n$ d'où le résultat cherché.

7) $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} U_n = e$ (évident d'après la question 6) ■

CALCUL PRATIQUE DES PRIMITIVES

Dans les exercices suivants, calculer les primitives des fonctions suivantes ; à l'aide du tableau des primitives usuelles ou bien en utilisant l'un ou les deux procédés fondamentaux : changement de variable et intégration par parties.

7.1 $f(x) = \dfrac{1}{x\,(\mathrm{Log}\,x)^2}$

7.2 $f(x) = \dfrac{1}{x\sqrt{1 + \mathrm{Log}\,x}}$

7.3 $f(x) = \dfrac{x\,\mathrm{Log}\,x}{(1 + x^2)^2}$

7.4 $f(x) = x\,e^{\sqrt{x}}$

7.5 $f(x) = \cos x\, e^{\sin x}$

7.6 $f(x) = e^{2x} . \cos e^{x}$

7.7 $f(x) = \dfrac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x}$

7.8 $f(x) = x\,\mathrm{tg}^2 x$

7.9 $f(x) = \dfrac{1}{3 + 5x^2}$

7.10 $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$.

7.11 $f(x) = (1+2x)\ \mathrm{Arg\,th}\ x$

7.12 $f(x) = x^2\,\mathrm{sh}\,x$

Solutions

7.1 Calcul de $F(x) = \displaystyle\int \frac{dx}{x\,(\mathrm{Log}\,x)^2}$

On effectue le changement de variable : $u = \mathrm{Log}\,x \Rightarrow du = \dfrac{dx}{x}$.

$$F(x) = \int \frac{du}{u^2} = \frac{1}{u} + C = \frac{-1}{\mathrm{Log}\,x} + C .$$ ■

7.2 Calcul de $F(x) = \displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{1 + \mathrm{Log}\,x}}$

On effectue un changement de variable : $u = \mathrm{Log}\,x \Rightarrow du = \dfrac{dx}{x}$.

$$F(x) = \int \frac{du}{\sqrt{1+u}} = 2\sqrt{1+u} + C = 2.\sqrt{1 + \mathrm{Log}\,x} + C .$$ ■

7.3 Calcul de $F(x) = \displaystyle\int \frac{x\,\mathrm{Log}\,x}{(1 + x^2)^2}\,dx$.

Effectuons d'abord le changement de variable $y = x^2 \Rightarrow dy = 2\,x\,dx$.

$F(x) = \frac{1}{4} . \int \frac{\text{Log } y}{(1+y)^2} \, dy$. Maintenant, faisons une intégration par parties en posant

$u = \text{Log } y$. donc $u' = \frac{1}{y}$ et $v' = \frac{1}{(1+y)^2}$ donc $v = - \frac{1}{(1+y)}$.

$$F(x) = - \frac{1}{4} \frac{\text{Log } y}{(1+y)} + \frac{1}{4} \int \frac{dy}{y\,(1+y)}.$$

Or $\frac{1}{y\,(1+y)} = \frac{1}{y} - \frac{1}{(1+y)}$, cela donne donc :

$$F(x) = - \frac{1}{4} \frac{\text{Log } y}{(1+y)} + \frac{1}{4} . \text{Log} \left| \frac{y}{1+y} \right| + C.$$

$$= - \frac{1}{2} \frac{\text{Log } x}{1+x^2} + \frac{1}{4} \text{Log} \frac{x^2}{1+x^2} + C .$$

■

7.4 calcul de $F(x) = \int x\, e^{\sqrt{x}} \, dx$.

on effectue le changement de variable $t = \sqrt{x} \Rightarrow dx = 2\,t\, dt$.

$$F(x) = \int t^2 . e^{2} . (2t\, dt) = \int 2 . t^3 . e^{t} . dt = F_1(t).$$

. il faudrait faire trois intégrations par parties successives pour abaisser le degré du polynôme $P(t) = 2\,t^3$ dans la dernière intégrale . En pratique , on utilise la méthode (simple) suivante : sachant que $F_1(t)$ sera également le produit d'un polynôme de même degré et de e^t on écrit $F_1(t)$ avec <u>des coefficients indéterminés :</u>

$$F_1(t) = (at^3 + bt^2 + ct + d)\, e^{t} .$$

En dérivant $F_1(t)$ et en identifiant , il vient :

$$F_1'(t) = [(at^3 + bt^2 + ct + d) + (3\,at^2 + 2\,bt + c)\,]\, e^{t} = 2\,t^3 . e^{t}.$$

On simplifie par e^t puis par identification , il vient :
$a = 2$; $b + 3a = 0$; $c + 2b = 0$; et $d + c = 0$. Cela donne $a = 2$; $b = -6$; $c = -12$ et $d = 12$. Par conséquent :

$$F(x) = F_1(t) = (2\,t^3 - 6\,t^2 + 12\,t + 12)\, e^{t} + C .$$

$$= 2 . (x\sqrt{x} - 3\,x - 6\sqrt{x} + 6)\, e^{\sqrt{x}} + C .$$

■

7.5 Calcul de $F(x) = \int \cos x \, e^{\sin x} \, dx.$

On effectue , naturellement , le changement de variable :
$u = \sin x . \Rightarrow du = \cos x \, dx$. et on a :

$$F(x) = \int e^{u} \,.\, du = e^{u} + C = e^{\sin x} + C \,.$$

■

7. 6 Calcul de $F(x) = \int e^{2x} \cos e^{x} \, dx = \int (e^{x})^{2} \,.\cos e^{x} \, dx \,.$

On pose $u = e^{x} \Rightarrow du = e^{x} dx$ donc $F(x) = \int u \,.\cos u \,.\, du$ qu'on intègre par parties

$$\int u \,.\cos u \,.\, du = u \sin u - \int \sin u \,.\, du = u \,.\sin u + \cos u + C.$$

D'où $F(x) = e^{x} \sin e^{x} + \cos e^{x} + C.$ ■

7 .7 Calcul de $F(x) = \int \dfrac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x} dx \,.$

En divisant le numérateur et le dénominateur par cos x , il vient :

$$F(x) = \int \frac{\operatorname{tg} x - 1}{\operatorname{tg} x + 1} dx.$$

On effectue maintenant le changement de variable :

$u = \operatorname{tg} x \Rightarrow x = \operatorname{Arctg} u$ et $dx = \dfrac{du}{1+u^{2}}$. D'où $F(x) = \int \dfrac{u-1}{u+1} \,.\, \dfrac{du}{1+u^{2}} \,.$

La décomposition en éléments simples de la fraction rationnelle sous le signe somme, donne :

$$F(x) = \int \frac{u\,du}{1+u^{2}} - \int \frac{du}{1+u} = \frac{1}{2} \,.\operatorname{Log}(1+u^{2}) - \operatorname{Log}|1+u| + C.$$

D'où $F(x) = \dfrac{1}{2} \,.\operatorname{Log}(1 + \operatorname{tg}^{2} x) - \operatorname{Log}|1 + \operatorname{tg} x| + C \,.$

ou encore $F(x) = -\operatorname{Log}|\sin x + \cos x| + C$ ■

7.8 Calcul de $F(x) = \int x \operatorname{tg}^{2} x \, dx \,.$

On fait une intégration par parties . On pose :
$u = x$ donc $u' = 1$ et $v' = \operatorname{tg}^2 x$ donc $v = \operatorname{tg} x - x$.

$F(x) = x(\operatorname{tg} x - x) - \int (\operatorname{tg} x - x)\, dx$, d'où $F(x) = x \operatorname{tg} x - x^{2} - \operatorname{Log}|\cos x| + \dfrac{x^{2}}{2} + C.$

Par suite $\quad F(x) = x\,\mathrm{tg}x - \frac{x^2}{2} - \mathrm{Log}\,|\cos x| + C.$ ■

7.9 Calcul de $\quad F(x) = \int \frac{dx}{3 + 5x^2} = \frac{1}{3} \cdot \int \frac{dx}{1 + \frac{5}{3}x^2}.$

Effectuons le changement de variable suivant :

$$u = \sqrt{\frac{5}{3}} \cdot x \quad \text{donc} \quad dx = \sqrt{\frac{3}{5}} \cdot du$$

$$F(x) = \frac{1}{3}\sqrt{\frac{3}{5}} \cdot \int \frac{du}{1 + u^2} = \frac{1}{\sqrt{15}} \,\mathrm{Arctg}u + C.$$

d'où $\quad F(x) = \frac{1}{\sqrt{15}} \,\mathrm{Arctg}\left(\sqrt{\frac{5}{3}} \cdot x\right) + C$ ■

7.10 Calcul de $\quad F(x) = \int \sqrt{x^2 - 1}\,dx.$

On fait une intégration par parties en posant :

$$u = \sqrt{x^2 - 1} \quad \text{donc}\ u' = \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}} \quad \text{et}\ v' = 1 \quad \text{donc}\ v = x.$$

$$F(x) = x\sqrt{x^2 - 1} - \int \frac{x^2}{\sqrt{x^2 - 1}}\,dx \quad \text{puis on écrit} \quad x^2 = x^2 - 1 + 1 :$$

$$= x\sqrt{x^2 - 1} - F(x) - \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 1}} \qquad \text{d'où}$$

$$2F(x) = x\sqrt{x^2 - 1} - \mathrm{Log}\,|x + \sqrt{x^2 - 1}| + C.$$

ou encore : $\quad F(x) = \frac{x}{2}\sqrt{x^2 - 1} - \frac{1}{2} \cdot \mathrm{Log}\,|x + \sqrt{x^2 - 1}| + C.$ ■

7.11 Calcul de $\quad F(x) = \int (1 + 2x)\,\mathrm{Argth}\,x\,dx.$

On fait une intégration par parties en posant :

$$u = \mathrm{Argth}\,x \quad \text{donc} \quad u' = \frac{1}{1 - x^2} \qquad \text{et}\ v' = (1 + 2x) \quad \text{donc}\ v = x + x^2$$

$$F(x) = (x + x^2) \cdot \mathrm{Argth}\,x - \int \frac{x + x^2}{1 - x^2}\,dx.$$

$$F(x) = x(1+x)\,\text{Argth}\,x + \int \frac{x}{x-1}\,dx$$ puis en écrivant $x = x - 1 + 1$

$$F(x) = x(1+x)\,\text{Argth}\,x + x + \text{Log}\,|x-1| + C$$ ■

7.12 Calcul de $F(x) = \int x^2\,\text{sh}x\,dx$.

On fait deux intégrations par parties successives en posant :
$u = x^2$ donc $u' = 2x$, et $v' = \text{sh}\,x$ donc $v = \text{ch}\,x$.

$$F(x) = x^2\,\text{ch}\,x - 2\int x\,\text{ch}\,x\,dx$$ puis en posant :

$u_1 = x$ donc $u'_1 = 1$ et $v'_1 = \text{ch}\,x$ donc : $v_1 = \text{sh}\,x$.

$$F(x) = x^2\,\text{ch}\,x - 2\,.\left[x\,\text{sh}\,x - \int \text{sh}\,x\,dx\right]$$

$$F(x) = x^2\,\text{ch}\,x - 2x\,\text{sh}\,x + 2\,\text{ch}\,x + C.$$ ■

Dans les exercices suivants, calculer les primitives les fraction rationnelles

7.13 $f(x) = \dfrac{x^5 + x^4 - 8}{x^3 - 4x}$ **7.14** $f(x) = \dfrac{x+3}{(x^2+1)(x-2)^2}$.

7.15 $f(x) = \dfrac{10}{(x^2+4x+5)^3}$ **7.16** $f(x) = \dfrac{x-1}{(x^2-x+1)^2}$.

Solutions

7.13 Calcul de $F(x) = \int \dfrac{x^5 + x^4 - 8}{x^3 - 4x}\,dx$.

On commence par décomposer la fraction rationnelle f, en éléments simples, dans $\mathbb{R}(x)$:

$$f(x) = x^2 + x + 4 + \frac{2}{3} + \frac{7}{x-2} - \frac{1}{x+2}.$$ puis en intégrant, cela donne :

$$F(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 4x + 2\,\text{Log}\,|x| + 7\,\text{Log}\,|x-2| - \text{Log}\,|x+2| + C.$$

ou encore : $F(x) = \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^2}{2} + 4x + \text{Log}\left(x^2\left|\dfrac{(x-2)^7}{x+2}\right|\right) + C$

■

7.14 Calcul de $F(x) = \int \dfrac{x+3}{(x^2+1)(x-2)^2}\,dx$.

On décompose la fraction rationnelle, en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$. Il s'en suit

$$F(x) = \int \left(\frac{1}{(x-2)^2} - \frac{3}{5(x-2)} + \frac{3x+1}{5(x^2+1)} \right) dx.$$

$$= \frac{-1}{(x-2)} - \frac{3}{5} \cdot \text{Log}\,|x-2| + \frac{3}{10} \cdot \int \frac{2x}{(x^2+1)} dx + \frac{1}{5} \cdot \int \frac{dx}{x^2+1} \cdot$$

$$= \frac{-1}{(x-2)} - \frac{3}{5} \text{Log}\,|x-2| + \frac{3}{10} \cdot \text{Log}\,(x^2+1) + \frac{1}{5} \cdot \text{Arctg}\, x + C. \quad \blacksquare$$

7.15 Calcul de $F(x) = \displaystyle\int \frac{dx}{(x^2+4x+5)^3}$.

Le changement de variable simple $t = x + 2$ (mettre sous la forme canonique), transformerait l'intégrale comme suit :

$$F(x) = \int \frac{dt}{(t^2+1)^3}.$$

Une intégration par parties de cette dernière intégrale augmenterait le degré du dénominateur, au lieu de l'abaisser. Ainsi, pour le calculer, on pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $J_n = \displaystyle\int \frac{dt}{(t^2+1)^n}$. et l'on va établir une relation de récurrence entre J_n et J_{n+1} en faisant une intégration par parties .

Posons : $u = \dfrac{1}{(t^2+1)^n} \Rightarrow u' = \dfrac{-2nt}{(t^2+1)^{n+1}}$ et $v' = 1 \Rightarrow v = t$.

Ainsi : $$J_n = \left[\frac{t}{(t^2+1)^n} \right] + 2n \int \frac{t^2\, dt}{(t^2+1)^{n+1}}.$$

En ajoutant et retranchant 1 dans la dernière intégrale, on obtient :

$$J_n = \frac{t}{(t^2+1)^n} + 2n J_n - 2n J_{n+1}.$$

On en déduit la relation de récurrence :

$$\boxed{J_{n+1} = \frac{t}{2n\,.\,(t^2+1)^n} + \left(\frac{2n-1}{2n}\right) . J_n\, .}$$

Ainsi $$F(x) = J_3 = \frac{t}{4(t^2+1)^2} + \frac{3}{4} \cdot J_2\,.$$

$$J_2 = \frac{t}{2(t^2+1)} + \frac{1}{2} J_1\,.$$

et $$J_1 = \int \frac{dt}{t^2+1} = \text{Arctg}\, t + C\,.$$

Par conséquent, on peut écrire :

$$F(x) = \frac{t}{4(t^2+1)^2} + \frac{3}{4}\left[\frac{t}{2(t^2+1)} + \frac{1}{2}.\ \text{Arctg } t\right] + C.$$

en renvenant à la variable x, cela donne :

$$F(x) = \frac{x+2}{4(x^2+4x+5)^2} + \frac{3x+6}{8(x^2+4x+5)} + \frac{3}{8}\text{Arctg}(x+2) + C. \quad ■$$

7.16 Calcul de $F(x) = \displaystyle\int \frac{(x-1)\,dx}{(x^2-x+1)^2}$.

$$F(x) = \frac{1}{2}.\int \frac{(2x-2)\,dx}{(x^2-x+1)^2} = \frac{1}{2}.\int \frac{(2x-1)-1}{(x^2-x+1)^2}dx.$$

$$= \frac{-1}{(x^2-x+1)} - \frac{1}{2}.\int \frac{dx}{(x^2-x+1)^2}.$$

$$= \frac{-1}{(x^2-x+1)} - \frac{8}{9}\int \frac{dx}{\left[\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)^2+1\right]^2}.$$

$$= \frac{-1}{(x^2-x+1)} - \frac{4\sqrt{3}}{9}.\int \frac{dt}{(t^2+1)^2} \quad \text{où} \quad t = \left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right).$$

Or d'après la formule de récurrence, établie dans l'exercice 7.15,

on a : $\displaystyle\int \frac{dt}{(t^2+1)^2} = J_2 = \frac{t}{2(t^2+1)} + \frac{1}{2}.\ \text{Arctg } t + C.$

Par conséquent, en revenant à la variable x, il vient :

$$F(x) = \frac{-1}{(x^2-x+1)} - \frac{2x-1}{6(x^2-x+1)} + \frac{1}{2}\text{Arctg}\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right) + C. \quad ■$$

7.17

Calculer les primitives des fonction irrationnelles suivantes :
1°) $f(x) = \dfrac{2.\sqrt[3]{x}+x}{\sqrt{x^3}-8x}$ 2°) $f(x) = \dfrac{\sqrt[4]{x^3}+\sqrt{x}}{x(\sqrt{x}-1)}$

Solution

1) Calcul de $F(x) = \displaystyle\int \frac{2.\sqrt[3]{x}+x}{\sqrt{x^3}-8x}.\ dx.$

On commence par chercher le dénominateur commun k des exposants rationnels de x . Ici k = 6. On effectue alors le changement de variable

$x = t^6 \Rightarrow dx = 6\,t^5$

$$F(x) = \int \frac{2 \, . \, t^2 + t^6}{t^9 - 8\, t^6} \, . \, 6.t^5 \, dt \; = \int \frac{2\,t + t^5}{t^3 - 8} \, dt \, .$$

On décompose en éléments simples dans $\mathbb{R}$ (X) la fraction rationnelle :

$$f_1\,(t) = \frac{t^5 + 2\,t}{t^3 - 8} = t^2 + \frac{3}{(t-2)} + \frac{5\,t + 6}{t^2 + 2\,t + 4}$$

$$\int \frac{t^5 + 2\,t}{t^3 - 8}\, dt = \frac{t^3}{3} + 3 \, . \operatorname{Log} | \, t - 2 \, | + \frac{5}{2} \, . \operatorname{Log}\,(t^2 + 2\,t + 4) - \int \frac{dt}{t^2 + 2t + 4} .$$

$$\text{où : } \int \frac{dt}{t^2 + 2t + 4} = \int \frac{dt}{(t+1)^2 + 3} = \frac{1}{\sqrt{3}} \, . \int \frac{\dfrac{dt}{\sqrt{3}}}{\left(\dfrac{t+1}{\sqrt{3}}\right)^2 + 1} = \frac{1}{\sqrt{3}} \, . \operatorname{Arctg}\left(\frac{t+1}{\sqrt{3}}\right) + C \, .$$

En revenant à la variable x , cela donne :

$$F\,(x) = \frac{\sqrt{x}}{3} + 3 \operatorname{Log} | \, \sqrt[6]{x} - 2 \, | + \frac{5}{2} \operatorname{Log}\,(\sqrt[3]{x} + 2 \sqrt[6]{x} + 4) - \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{Arctg}\left(\frac{\sqrt[6]{x} + 1}{\sqrt{3}}\right) + C.$$

2) Calcul de $\quad F\,(x) = \displaystyle\int \frac{\sqrt[4]{x^3} + \sqrt{x}}{x\,(\sqrt{x} - 1)} \, dx.$

Le dénominateur commun des exposants rationnels de x est k = 4 .
On effectue alors le changement de variable $x = t^4 \Rightarrow dx = 4\,t^3 \, . \, dt$.

$$F\,(x) = \int \frac{t^3 + t}{t^4\,(t^2 - 1)} \, 4\,t^3 \, dt = 4 \, . \int \frac{t^2 + 1}{t^2 - 1} \, dt \, .$$

$$= 4 \, . \int \frac{t^2 - 1 + 2}{t^2 - 1} \, dt = 4\,t - 2 \, . \operatorname{Log} \left| \frac{1 + t}{1 - t} \right| + C$$

En revenant à la variable x, cela donne :

$$F(x) = 4 \, . \sqrt[4]{x} - 2 \, . \operatorname{Log} \left| \frac{1 + \sqrt[4]{x}}{1 - \sqrt[4]{x}} \right| + C \, . \qquad \blacksquare$$

Dans chacun des exercices suivants calculer les primitives :

7.18 $\quad f(x) = \dfrac{x + 1}{(x - 3)\,\sqrt{x - 2}}$ $\qquad$ **7.19** $\quad f(x) = \dfrac{x}{(x - 1)^2} \, \sqrt{\dfrac{x + 1}{x - 1}} .$

7.20 $\quad f(x) = \dfrac{x + 3}{\sqrt{5 - 4\,x - x^2}} .$ $\qquad$ **7.21** $\quad f(x) = \dfrac{x + 4}{\sqrt{x^2 + 2\,x - 3}} .$

7.22 $\quad f(x) = \dfrac{1}{x\,\sqrt{1 - x^2}} .$ $\qquad$ **7.22** $\quad f(x) = \sqrt{x^2 + 2x + 2} \, .$

Solution

7.18 Calcul de $F(x) = \displaystyle\int \frac{x+1}{(x-3)\sqrt{x-2}}\,dx$.

On effectue le changement de variable : $t = \sqrt{x-2}$

D'où $x = t^2 + 2$ et $dx = 2t \,.\, dt$

$$F(x) = \int \frac{(t^2+3)}{(t^2-1)\,.\,t} \,.\, 2\,t\,dt = 2\,.\int \left(1 + \frac{2}{t-1} - \frac{2}{t+1}\right) dt\,.$$

$$= 2\,x + 4\,\mathrm{Log}\left|\frac{t-1}{t+1}\right| + C\,.$$

En revenant à la variable x, cela donne :

$$F(x) = 2\,x + 4\,\mathrm{Log}\left|\frac{\sqrt{x-2}-1}{\sqrt{x-2}+1}\right| + C\,. \qquad ■$$

7.19 Calcul de $F(x) = \displaystyle\int \frac{x}{(x-1)^2}\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}\,dx$

On effectue le changement de variable : $t = \sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}$.

D'où $x = \dfrac{t^2+1}{t^2-1}$ et $2\,t\,dt = \dfrac{-2\,dx}{(x-1)^2}$.

En remplaçant dans l'intégrale; il vient :

$$F(x) = \int \left(\frac{t^2+1}{t^2-1}\right).\,t\,.\,(-\,t\,.\,dt) = -\int \frac{t^2\,(t^2+1)}{t^2-1}\,dt\,.$$

$$= -\int \left(t^2 + 2 + \frac{1}{t-1} - \frac{1}{t+1}\right) dt\,.$$

$$= -\frac{t^3}{3} + 2\,t - \mathrm{Log}\,|\,t-1\,| \quad \mathrm{Log}\,|\,t+1\,| + C.$$

En revenant á la variable x celà donne :

$$F(x) = \frac{(5-7\,x)}{3\,(x-1)}\sqrt{\frac{x+1}{x-1}} + \mathrm{Log}\left|\frac{\sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}+1}{\sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}-1}\right| + C\,. \qquad ■$$

7.20 Calcul de $F(x) = \displaystyle\int \frac{x+3}{\sqrt{5-4\,x-x^2}}\,dx$.

$$F(x) = -\frac{1}{2}\int \frac{-\,2x-6}{\sqrt{5-4x-x^2}}\,dx = -\frac{1}{2}\int \frac{(-\,2x-4)-2}{\sqrt{5-4x-x^2}}\,dx\,.$$

$$= -\sqrt{5-4x-x^2} + \int \frac{dx}{\sqrt{9-(x+2)^2}}$$

$$= -\sqrt{5-4x-x^2} + \operatorname{Arcsin}\left(\frac{x+2}{3}\right) + C\,.$$

Cette dernière intégrale s'obtient en faisant le changement de variable $t = \frac{x+2}{3}$ ■

7.21 Calcul de $F(x) = \int \frac{x+4}{\sqrt{x^2+2x-3}}\,dx\,.$

$$F(x) = \frac{1}{2} \cdot \int \frac{2x+8}{\sqrt{x^2+2x-3}}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{(2x+2)+6}{\sqrt{x^2+2x-3}}\,dx.$$

$$= \sqrt{x^2+2x-3} - 3.\int \frac{dx}{\sqrt{(x+1)^2-4}}$$

Pour le calcul de cette dernière intégrale , on effectue le changement variable :
$2t = (x+1) \Rightarrow 2\,dt = dx$.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(x+1)^2-4}} = \int \frac{2\,dt}{\sqrt{4t^2-4}} = \int \frac{dt}{\sqrt{t^2-1}} = \operatorname{Log}\left|t + \sqrt{t^2-1}\right| + C.$$

En revenant à la variable x, cela donne :

$$F(x) = \sqrt{x^2+2x-3} - 3\operatorname{Log}\left|\frac{(x+1)}{2} + \frac{1}{2}\cdot\sqrt{x^2+2x-3}\right| + C$$ ■

7.22 Calcul de $F(x) = \int \frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}}\,.$

<u>1ère méthode</u> : on effectue le changement de variable x = sin u donc dx = cosu du .
Ce qui donne :

$$F(x) = \int \frac{\cos u\;.\,du}{\sin u\,.\,\cos u} = \int \frac{du}{\sin u}\,.$$

On effectue un nouveau changement de variable $t = \operatorname{tg}\frac{u}{2}$

(méthode générale pour le calcul d'intégrales de fonctions trigonométriques . Voir plus loin) . Cela donne :

$$\sin u = \frac{2t}{1+t^2} \quad \text{et} \quad du = \frac{2\,dt}{1+t^2}\,. \quad (\text{car } u = 2.\operatorname{Arctg} t\,).$$

Ainsi : $\int \frac{du}{\sin u} = \int \frac{1+t^2}{2t}\cdot\frac{2\,.\,dt}{1+t^2} = \int \frac{dt}{t} = \operatorname{Log}|t|\,.$

Ainsi, en revenant successivement, à la variable u puis à la variable x, il s'en suit

$$F(x) = \operatorname{Log}\left|\operatorname{tg}\left(\frac{1}{2}\operatorname{Arcsin} x\right)\right| + C\,.$$

<u>2ème méthode</u> : valable pour le calcul d'intégrales du type :

$$\int \frac{dx}{(px+q)\sqrt{ax^2+bx+c)}} \qquad \text{on pose} \qquad u = \frac{1}{px+q}.$$

Dans notre cas, on pose : $u = \dfrac{1}{x}$ donc $dx = \dfrac{-du}{u^2}$.
Ce qui donne :

$$F(x) = \int \frac{-\frac{du}{u^2}}{\frac{1}{u}\sqrt{1-\frac{1}{u^2}}} = \int \frac{-du}{\sqrt{u^2-1}} = -\,\mathrm{Log}\,|u+\sqrt{u^2}-1\,| + C$$

$$= -\,\mathrm{Log}\left|\frac{1}{x}+\frac{1}{x}\sqrt{1-x^2}\right| + C = \mathrm{Log}\,|\,x\,| - \mathrm{Log}\,(1+\sqrt{1-x^2}) + C. \quad \blacksquare$$

7.23 Calcul de $F(x) = \displaystyle\int \sqrt{x^2+2x+2}\,dx$.

On écrit $F(x) = \displaystyle\int \sqrt{(x+1)^2+1}\,dx$ puis on effectue le changement de variable

$(x+1) = \mathrm{sh}\,t \Rightarrow dx = \mathrm{ch}\,t\ dt$.

$$F(x) = \int \sqrt{\mathrm{sh}^2 t+1}\,.\,\mathrm{ch}t\,dt = \int \mathrm{ch}^2\,dt = \int \left(\frac{\mathrm{ch}\,2t+1}{2}\right)dt = \frac{1}{4}\,\mathrm{sh}\,2t + \frac{t}{2} + C.$$

Par conséquent : $F(x) = \dfrac{1}{4}\,.\,\mathrm{sh}\,2\ \mathrm{Argsh}\,(x+1) + \dfrac{1}{2}\,\mathrm{Argsh}\,(x+1) + C$ $\blacksquare$

Dans les exercices suivants, calculer les primitives des fonctions trigonométriques

7.24 $f(x) = \dfrac{1}{1+2\cos x}$ **7.25** $f(x) = \dfrac{1}{1+\sin x-\cos x}$

7.26 $f(x) = \dfrac{\sin x}{\cos x\,(1+\cos^2 x)}$. **7.27** $f(x) = \displaystyle\int \frac{\sqrt{\mathrm{tg}\,x}\ dx}{\sin 2x}$

7.28 $f(x) = \dfrac{1}{1+\mathrm{tg}\,x}$ **7.29** $f(x) = \mathrm{tg}^3 x$.

Solutions

7.24 Calcul de $F(x) = \displaystyle\int \frac{dx}{1+2\cos x}$

La méthode générale consiste à effectuer le changement de variable suivant :

$$t = \mathrm{tg}\,\frac{x}{2} \Rightarrow x = 2\,\mathrm{Arctg}\,t \quad \text{et} \quad dx = \frac{2\,dt}{1+t^2}$$

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2} \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \quad \text{et} \quad \operatorname{tg} x = \frac{2t}{1-t^2}.$$

En remplaçant dans l'intégrale ci-dessus, il vient :

$$F(x) = \int \frac{2 \,.\, dt}{3-t^2} = \frac{2}{\sqrt{3}} \,.\, \operatorname{Log} \left| \frac{\sqrt{3}-t}{\sqrt{3}+t} \right| + C.$$

En revenant à la variable x, on obtient : $F(x) = \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{Log} \left| \frac{\sqrt{3} - \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{\sqrt{3} + \operatorname{tg} \frac{x}{2}} \right| + C.$ ■

7.25 Calcul de $F(x) = \int \frac{dx}{1 + \sin x - \cos x}$.

En effectuant le même changement de variable que dans l'exercice n° 7.24 (ci-dessus) on obtient :

$$F(x) = \int \frac{dt}{t^2+t} = \int \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+1} \right) dt = \operatorname{Log} |t| - \operatorname{Log} |t+1| + C.$$

D'où
$$F(x) = \operatorname{Log} \left| \frac{\operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg} \frac{x}{2}} \right| + C.$$
■

7.26 Calcul de $F(x) = \int \frac{\sin x}{\cos (1 + \cos^2 x)} dx$.

La méthode générale conduirait à des calculs trop compliqués.

Remarquons que cette fonction peut s'écrire sous la forme : F'(x) = sinx. R (cos x).

On effectue alors le changement de variable $u = \cos x \Rightarrow du = - \sin x \, dx$.

Ce qui donne :

$$F(x) = \int \frac{-du}{-u(1+u^2)} = \int \left(\frac{1}{u} + \frac{u}{1+u^2} \right) du. = -\operatorname{Log} |u| + \frac{1}{2} \,.\, \operatorname{Log} (1+u^2) + C.$$

D'où
$$F(x) = \operatorname{Log} \left(\frac{\sqrt{1+\cos^2 x}}{|\cos x|} \right) + C.$$
■

7.27 Calcul de $F(x) = \int \frac{\sqrt{\operatorname{tg} x}}{\sin 2x} dx$.

on a
$$F(x) = \int \frac{\sqrt{\operatorname{tg} x}}{2 \,.\, \sin x \cos x} dx = \int \frac{\sqrt{\operatorname{tg} x}}{2 \,.\, \operatorname{tg} x \,.\, \cos^2 x} dx.$$

Cette fonction f s'écrit seulement en fonction de tgx et de puissances paires de cos x (ou de sinx). Donc on peut effectuer le changement de variable u = tgx.

on a : $du = (1 + tg^2 x)\, dx = \dfrac{dx}{\cos^2 x}$. Donc :

$$F(x) = \int \frac{\sqrt{tg\, x}}{2\, tg\, x} \cdot \left(\frac{dx}{\cos^2 x} \right) = \int \frac{\sqrt{u}}{2u}\, du = \int \frac{1}{2\sqrt{u}}\, du = \sqrt{u} + C .$$

Par conséquent : $F(x) = \sqrt{tg\, x} + C$. ■

7.28 Calcul de $F(x) = \displaystyle\int \frac{dx}{1 + tg\, x}$.

On effectue le changement de variable $u = tgx$

donc $x = \text{Arctg}\, u$ et $dx = \dfrac{du}{1 + u^2}$. D'où :

$$F(x) = \int \frac{du}{(1+u)(1+u^2)} \quad \frac{1}{2} \int \left(\frac{1}{1+u} - \frac{u-1}{u^2+1} \right) du$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \text{Log}\, |1 + u| - \frac{1}{4} \cdot \text{Log}\, (u^2 + 1) + \frac{1}{2} \text{Arctg}\, u + C$$

D'où $F(x) = \dfrac{1}{2} \cdot \text{Log}\, |1 + tg\, x| + \dfrac{1}{2} \text{Log}\, |\cos x| + \dfrac{x}{2} + C$. ■

7.29 Calcul de $F(x) = \displaystyle\int tg^3 x\, dx$.

$$F(x) = \int [\, tg\, x \,.\, (1 + tg^2 x) - tg\, x \,]\, dx .$$

$$= \int tg\, x\, (1 + tg^2 x)\, dx - \int \frac{\sin x}{\cos x}\, dx .$$

Dans la première intégrale on pose $u = tgx$. et dans la seconde , on pose $v = \cos x$.
Cela donne :

$$F(x) = \int u \,.\, du - \int \frac{dv}{v} = \frac{1}{2} u^2 - \text{Log}\, |v| + C.$$

Finalement $F(x) = \dfrac{1}{2} \cdot tg^2 x - \text{Log}\, |\cos x| + C$ ■

7.30 Calculer les intégrales suivantes :

1) $I = \displaystyle\int \frac{dx}{sh\, x + 2\, ch\, x}$ 2) $J = \displaystyle\int \frac{sh\, x}{1 + ch\, 2x}\, dx$.

1) Calcul de $I = \displaystyle\int \frac{dx}{\operatorname{sh} x + 2 \operatorname{ch} x}$.

On écrit la fonction sous le signe somme en fonction de e^x :

$$\frac{1}{\operatorname{sh} x + 2 \operatorname{ch} x} = \frac{1}{\dfrac{e^x - e^x}{2} + e^x + e^{-x}} = \frac{2\,e^x}{3\,e^{2x} + 1} .$$

On effectue alors le changement de variable $t = e^x$, donc $dt = e^x\,dx$. Il s'en suit :

$$I = \int \frac{2\,e^x\,dx}{3\,e^{2x} + 1} = \frac{2}{\sqrt{3}} \int \frac{\sqrt{3}\,.\,dt}{(\sqrt{3}\,.\,t)^2 + 1} .$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}} . \operatorname{Arctg} \sqrt{3}\,t + C = \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{Arctg} (\sqrt{3}\,.\,e^x) + C$$

2) Calcul de $J = \displaystyle\int \frac{\operatorname{sh} x}{1 + \operatorname{ch} 2x}\,dx$.

$$1 + \operatorname{ch} 2x = 1 + \operatorname{sh}^2 x + \operatorname{ch}^2 x = 2 \operatorname{ch}^2 x.$$

D'où $J = \displaystyle\int \frac{\operatorname{sh} x}{2\,.\,\operatorname{ch}^2 x}\,dx$. On effectue le changement de variable

$t = \operatorname{ch} x \Rightarrow dt = \operatorname{sh} x\,dx$.

D'où $J = \displaystyle\int \frac{dt}{t^2} = -\frac{1}{t} + C$ Finalement : $J = \dfrac{-1}{\operatorname{ch} x} + C.$

■

INTEGRALES GENERALISEES

8.1 Etudier par un calcul direct, la nature de l'intégrale : $I = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2 - 1}$.

Solution

Posons, pour tout $x \in \mathbb{R} - \{-1 ; 1\}$: $f(x) = \frac{1}{x^2 - 1}$.

L'intérale I admet deux singularités en 1 et en $+\infty$.
Pour cela on écrit pour $a > 1$:

$$I = \int_0^1 \frac{dx}{x^2 - 1} + \int_1^a \frac{dx}{x^2 - 1} + \int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^2 - 1} = I_o + I_1 + I_a .$$

En outre : pour tout $x \in \mathbb{R} - \{-1 ; 1\}$ $f(x) = \frac{1}{2(x-1)} - \frac{1}{2(x+1)}$.

Une primitive de f est donnée par $F(x) = \frac{1}{2} \operatorname{Log} \left| \frac{x-1}{x+1} \right|$.

Par définition on a : $I_0 = \lim_{x \to 1^-} [F(x) - F(o)] = -\infty$ donc I_o est divergente et donc I aussi.

■

8.2 Etudier la convergence des intégrales suivantes

$$I = \int_0^1 \frac{\operatorname{Log} x}{x - 1} dx . \quad \text{et} \quad J = \int_1^{+\infty} \frac{\operatorname{Log} x}{x - 1} dx .$$

Solution

__Pour I__ : on a un problème au voisinage de 0 et au voisinage de 1

($\frac{\operatorname{Log} x}{x - 1}$ n'est pas définie en ces deux points) .

Posons donc $I = I_1 + I_2$ avec $I_1 = \int_0^c \frac{\operatorname{Log} x}{x - 1} dx$ et $I_2 = \int_c^1 \frac{\operatorname{Log} x}{x - 1} dx$ où $0 < c < 1$

au voisinage de 1 : $\dfrac{\text{Log } x}{x - 1} = \dfrac{\text{Log } x - \text{Log } 1}{x - 1}$.

qui n'est autre que le taux d'accroissement de la fonction Log au point 1

donc on aura $\dfrac{\text{Log } x}{x - 1} \underset{1}{\sim} 1$ donc I_2 converge

au voisinage de 0

$$\frac{\text{Log } x}{x - 1} \sim -\text{Log } x \text{ quand } x \to 0 .$$

Et comme on a $\displaystyle\int_0^c -\text{Log } x \, dx = -\lim_{\varepsilon \to 0} \int_\varepsilon^c \text{Log } x \, dx = -\lim_{\varepsilon \to 0} [x \text{ Log } x - x]_\varepsilon^c$

$$= c - c \log c$$

Donc I_1 converge .

En definitive $I = I_1 + I_2$ est convergente .

Pour J : $J = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\text{Log } x}{x - 1} \, dx$ on fait le changement de variable $t = \dfrac{1}{x}$

d'où $$J = \int_1^0 \frac{\text{Log } t}{\frac{1}{t} - 1} \left(\frac{dt}{t^2} \right) = \int_1^0 \frac{\text{Log } t}{t(1 - t)} \, dt = \int_0^1 \frac{\text{Log } t}{t(t - 1)} \, dt .$$

$$= \int_0^1 \frac{\text{Log } t}{t - 1} \, dt - \int_0^1 \frac{\text{Log } t}{t} \, dt = I + K .$$

où I est l'intégrale convergente précédente et

$K = \displaystyle\int_0^1 -\frac{\text{Log } t}{t} \, dt = -\lim_{\varepsilon \to 0} \left[\frac{(\text{Log } t)^2}{2} \right]_\varepsilon^1 = +\infty$. Donc K diverge.

Ainsi, J qui est la somme d'une intégrale convergente et d'une intégrale divergente est divergente

■

8.3 Préciser la nature de l'intégrale généralisée suivante :

$$I = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x(1 + x^2)} .$$

Solution

I est bien une intégrale généralisée puisqu'on intègre sur un intevalle infinie.

Le seul problème qui se pose ici, c'est au voisinage de $+\infty$

Or au voisinage de $+\infty$ $f(x) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{x^3}$ et $f(x) > 0$ $\forall x \in [1, +\infty[$.

$$I = \int_1^{+\infty} f(x)\,dx \text{ est convergente car } \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^3}\,dx \text{ est convergente .}$$

■

8.4 Quelle est la nature de l'intégrale généralisée

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\text{Arctg } x}{x^2}\,dx .$$

Solution

I est une intégrale généralisée car l'intevalle d'intégration est infini, et en plus quand x tend vers 0 : $f(x) \longrightarrow +\infty$.

f est définie et continue sur $]0,+\infty[$

posons $I = I_1 + I_2$ avec $I_1 = \displaystyle\int_0^1 \frac{\text{Arctg } x}{x^2}\,dx$ et $I_2 = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\text{Arctg } x}{x^2}\,dx$.

Sur $]0, 1]$ $f(x) > 0$.

Au voisinage de 0 : $f(x) \underset{0}{\sim} \dfrac{1}{x}$, or $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{x}$ est divergente donc I diverge aussi.

■

8.5 Etudier la nature de l'intégrale généralisée

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}}{1+x}\,dx .$$

Solution

On est en présence d'une intégrale généralisée, avec f définie et continue sur $[0,+\infty[$ et $f(x) > 0$ $\forall x \in [0, +\infty[$.

au voisinage de $+\infty$ on a : $f(x) = \sim \dfrac{e^{-x}}{x}$

Et on sait que $\lim\limits_{x \to +\infty} x^{\alpha} e^{-x} = 0$ pour tout $\alpha \geq 0$.

Donc $x^{\alpha} e^{-x} \leq M$ pour x voisin de $+\infty$ $(x \geq a > 0)$.

Ainsi : $x^{\alpha}\dfrac{e^{-x}}{x} \leq \dfrac{M}{x} \Rightarrow \dfrac{e^{-x}}{x} \leq \dfrac{M}{x^{\alpha+1}} \quad \forall\, \alpha \leq 0.$

En particulier si $\alpha = 1$, on aura :

$\dfrac{e^{-x}}{x} \leq \dfrac{M}{x^2}$ donc $\displaystyle\int_a^{+\infty} \frac{e^{x}\,dx}{x}$ est majorée par une intégrale de Riemann convegente,

donc elle est convergente . Par conséquent : $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ est aussi convergente .

Finalement : $\displaystyle I = \int_0^{+\infty} f(x)\,dx = \int_0^{a} f(x)\,dx + \int_a^{+\infty} f(x)\,dx .$

Ainsi I est la somme d'une intégrale définie et d'une intégrale généralisée convergente ce qui implique que I est convergente.

■

8.6 Etudier l'existence de l'intégrale : $\displaystyle I = \int_0^{+\infty} (x + 1 - \sqrt{x^2 + 2x + 2}\,)\,dx .$

Solution

Soit f définie par $f(x) = x + 1 - \sqrt{x^2 + 2x + 2}$.

f est définie continue sur $[0 , +\infty[$, $f(x) < 0 \quad \forall\, x \in [o , +\infty[$.
Le seul problème qu'on a dans cette intégrale généralisée se situe au voisinage de $+\infty$

Posons : $A = (x^2 + 2x + 2)^{\frac{1}{2}} = (x+1)\left(1 + \dfrac{1}{(x+1)^2}\right)^{\frac{1}{2}}$.

Soit $u = \dfrac{1}{(x+1)^2}$. Lorsque x est au voisinage de $+\infty$, u est au voisinage de 0 et

on a : $\sqrt{1+u} = 1 + \frac{1}{2}u - \frac{1}{8}u^2 + u^2\,\varepsilon(u)$

$$= 1 + \frac{1}{2(1+x)^2} - \frac{1}{8(1+x)^4} + \frac{1}{(x+1)^4}\,\varepsilon\left(\frac{1}{(x+1)^2}\right).$$

Donc : $$A = (x+1) + \frac{1}{2(1+x)} - \frac{1}{8(1+x)^3} + \frac{1}{(x+1)^3}\,\varepsilon\left(\frac{1}{x^2}\right).$$

D'où : $$f(x) = -\frac{1}{2(x+1)} + \frac{1}{8(x+1)^3} + \frac{1}{(x+1)^3}\,\varepsilon\left(\frac{1}{x^2}\right).$$

Finalement : au voisinage de $+\infty$ on a $f(x) \sim \dfrac{-1}{2(x+1)}$.

Or : $\displaystyle\int_1^{+\infty} -\frac{1}{2(x+1)}\,dx$ est divergente, donc I est divergente. ■

8.7 Soit $p \in \mathbb{N}^*$

1) Montrer que la fonction $x \to (\text{Log } x)^p$ est intégrable sur $]0,1]$.

2) Calculer $I_p = \displaystyle\int_0^1 (\text{Log } x)^p\,dx$. en faisant le changement de variable $t = \log x$

Solution

1) On sait que $\forall\, \alpha > 0 \quad \lim\limits_{x \to 0} x^\alpha (\text{Log } x)^p = 0$.

pour $\varepsilon = 1$, il existe $\eta > 0$ tel que $[0 < x < \eta \Rightarrow |x^\alpha (\text{Log } x)^p| < 1$

D'où $|(\text{Log } x)^p| < \dfrac{1}{x^\alpha}$ au voisinage de 0, et ce pour tout $\alpha > 0$.

En particulier pour $\alpha = \dfrac{1}{2}$ on a

$\displaystyle\int_0^\eta \frac{dx}{x^{1/2}}$ est convergente donc $\displaystyle\int_0^\eta |(\text{Log } x)^p|\,dx$ est convergente.

d'où I_p est absolument convergente donc convergente.

2) $t = \text{tg } x \longrightarrow x = e^t$ d'où $dx = e^t\,dt$.

$$I_p = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{\text{Log } \varepsilon}^0 t^p e^t\,dt = \lim_{\varepsilon \to 0^+} J_\varepsilon \quad \text{avec} \quad J_\varepsilon = \int_{\text{Log } \varepsilon}^0 t^p e^t\,dt.$$

or $\quad J_\varepsilon = [\,t^p e^t\,]_{\text{Log } \varepsilon}^0 - p \displaystyle\int_{\text{Log } \varepsilon}^0 e^t t^{p-1}\,dt$

d'où $\quad I_p = \lim\limits_{\varepsilon \to 0^+} J_\varepsilon = -p\,I_{p-1}$ et par récurrence on alors $I_p = (-1)^{p-1}\,p\,!\,I_1$

d'où $\quad I_1 = \lim\limits_{\varepsilon \to 0^+} \displaystyle\int_\varepsilon^1 \text{Log } x\,dx = -1$. Finalement : $I_p = (-1)^p\ p\,!$ ■

8.8 Préciser la nature de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^{p-1}}{x+1}\,dx$ suivant les valeurs de p

Solution

La fonction $x \longrightarrow \frac{x^{p-1}}{x+1}$ est définie sur $R^*_+ \quad \forall p \in \mathbb{R}$.

<u>au voisinage de 0</u> on a $\frac{x^{p-1}}{x+1} \underset{0}{\sim} x^{p-1}$.

pour a>0 on a $\int_0^a x^{p-1}\, dx = \int_0^a \frac{dx}{x^{1-p}}$ qui n'est convergente que si $1 - p < 1$

C'est-à-dire $p > 0$.

<u>au voisinage de $+\infty$</u> Soit $\int_a^{+\infty} \frac{x^{p-1}}{1+x}\, dx$.

Or $\frac{x^{p-1}}{1+x} \sim x^{p-2}$ au voisinage de $+\infty$.

donc $\int_a^{+\infty} x^{p-2}\, dx = \int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^{2-p}}$ qui n'est convergente que si $2 - p > 1$ d'où $p < 1$

Par suite l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{x^{p-1}}{1+x}\, dx$ est convergente si et seulement si $0 < p < 1$.

■

8.9 Nature de l'intégrale $I = \int_e^{+\infty} \frac{dx}{(\text{Log } x)^n}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

Solution

Le seul problème qu'on a dans cette intégale généralisée, se trouve au voisinage de $+\infty$.

or $\forall x \geq e$ on sait que $\sqrt[n]{x} > \text{Log } x$

C'est-à-dire : $x > (\text{Log } x)^n$ d'où

$\frac{1}{x} < \frac{1}{(\text{Log } x)^n}$ et on sait que $\int_e^{+\infty} \frac{dx}{x}$ diverge

Par conséquent : $\int_e^{+\infty} \frac{dx}{(\text{Log } x)^n}$ est également divergente.

■

8.10

soit $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{1-x^2}}\,dx \qquad n \in \mathbb{Z}.$

1) Pour quelles valeurs de $n \in \mathbb{Z}$, I_n existe t-il ? .

2) Etablir une relation de récurrence entre les I_n

3) Calculer I_n .

Solution

1) Pour cette intégrale généralisée I_n , il y'a problème en 0 et en 1

Au voisinage de 0 :

$\dfrac{x^n}{\sqrt{1-x^2}} \underset{0}{\sim} x^n$ donc on n'aura convergence que si $n > -1$. C'est à dire $n \geq 0$

Au voisinage de 1 :

on a $\dfrac{x^n}{\sqrt{1-x^2}} \underset{1}{\sim} \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. dont l'intégrale converge en 1. Donc I_n converge pour $n \geq 0$

2) En faisant une intégration par partie de I_n on trouve :

$I_n = \dfrac{n-1}{n} I_{n-2}$.

3) pour $n = 2k$ on aura : $I_{2k} = \dfrac{(2k)!}{2^{2k}(k!)^2} I_0$ avec $I_0 = \dfrac{\pi}{2}$

pour $n = 2k+1$ $\quad I_{2k+1} = \dfrac{2^{2k}(k!)^2}{(2k+1)!} I_1$ avec $I_1 = 1$.

■

8.11

Etudier l'existence de l'intégrale suivante en fonction de α

$$I_\alpha = \int_0^{+\infty} x^\alpha \left(1 - e^{-\frac{1}{\sqrt{x}}}\right) dx.$$

Solution

Au voisinage de 0 :

On a $x^\alpha \left(1 - e^{-\frac{1}{\sqrt{x}}}\right) \underset{0}{\sim} x^\alpha$

D'où $\displaystyle\int_0^a x^\alpha \left(1 - e^{-\frac{1}{\sqrt{x}}}\right) \underset{0}{\sim} \int_0^a x^\alpha\,dx.$ qui n'est convergente que si $\alpha > -1$

Au voisinage de $+\infty$

On sait que $1 - e^x = -x + \varepsilon(x)$ pour x voisin de 0

Donc : $1 - e^{-\frac{1}{\sqrt{x}}} \sim \frac{1}{\sqrt{x}}$. pour x voisin de $+\infty$

D'où : $x^{\alpha}(1 - e^{-\frac{1}{\sqrt{x}}}) \sim x^{\alpha - \frac{1}{2}}$ lorsque $x \to +\infty$

Ainsi : $\int_a^{+\infty} x^{\alpha - \frac{1}{2}} dx$ converge si $\alpha < -\frac{1}{2}$

Finalement : $\int_0^{+\infty} x^{\alpha}(1 - e^{-\frac{1}{\sqrt{x}}})\, dx$ converge si et seulement si : $-1 < \alpha < -\frac{1}{2}$. ∎

8.12 Préciser la nature de l'intégrale $I = \int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x}\sin\left(\frac{1}{x^2}\right)}{\mathrm{Log}(1+x)}\, dx$.

Solution

<u>au voisinage de 0</u> :

$$\left|\frac{\sqrt{x}\,\sin(\frac{1}{x^2})}{\mathrm{Log}(1+x)}\right| \leq \frac{\sqrt{x}}{\mathrm{Log}(1+x)} \quad \forall\ x > 0$$

au voisinage de 0, $\frac{\sqrt{x}}{\mathrm{Log}(1+x)} \sim \frac{1}{\sqrt{x}}$

comme $\int_0^a \frac{dx}{\sqrt{x}}$ converge pour tout a>0, l'intégrale $\int_0^a \frac{\sqrt{x}\ \sin\left(\frac{1}{x^2}\right)}{\mathrm{Log}(1+x)}\, dx$ converge.

<u>au voisinage de + ∞</u> :

$\sin\frac{1}{x^2} \sim \frac{1}{x^2}$ pour $x \to +\infty$ d'où $\sqrt{x}\sin\left(\frac{1}{x^2}\right) \sim \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}$.

et comme $\frac{1}{x^{\frac{3}{2}}\mathrm{Log}(1+x)} < \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}$ pour x assez grand

alors $\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^{\frac{3}{2}}\ \mathrm{Log}(1+x)}$ converge car majorée par une intégrale convergente.

En définitive $\quad I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x}\,\sin\left(\frac{1}{x^2}\right)}{\mathrm{Log}\,(1+x)}\,dx \quad$ converge ■

8.13 Soit la fonction définie pour $x \in \mathbb{R}$ par $\quad \Gamma(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t}\,dt$.

a) Quel est l'ensemble de définition de Γ

b) trouver une relation entre $\Gamma(n+1)$ et $\Gamma(n)$

c) Calculer $\Gamma(n+1)$ pour $n \in \mathbb{N}$.

Solution

a) l'ensemble de définition de Γ, est l'ensemble des $x \in \mathbb{R}$ pour lesquels l'intégrale

$\displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t}\,dt$ est convergente.

<u>au voisinage de 0</u> : on a $t^{x-1} e^{-t} \sim t^{x-1}$. (fonctions positives)

or $\displaystyle\int_0^{c} t^{x-1}\,dt$ est une intégrale de Riemann qui converge Si $1 - x < 1$

c'est- à -dire si $x > 0$. (c étant un nombre strictement positif).

par conséquent : $\quad \displaystyle\int_0^{c} t^{x-1} e^{-t}\,dt$ converge si $x > 0$

<u>au voisinage de $+\infty$</u> :

on a $\quad t^{\alpha} e^{-t} \longrightarrow 0 \quad \forall\, \alpha \in \mathbb{R}$

donc en particulier pour $\alpha = x + 1 = (x-1) + 2$ et dans ce cas (cf Ex 1)

$$t^{x-1} e^{-t} \leq \frac{M}{t^2}. \text{ pour } t \text{ assez grand.}$$

donc $\quad \displaystyle\int_c^{+\infty} t^{x-1} e^{-t}\,dt$ converge $\forall\, x \in \mathbb{R}$

En définitive $\quad \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t}\,dt \quad$ converge si $x > 0$

Par suite l'ensemble de définition de Γ est $D_\Gamma = \,]\,0\,, +\infty\,[$

b) par une intégration par parties, on montre que $\Gamma(x+1) = x\,\Gamma(x) \quad \forall\, x > 0$.

c) En appliquant la relation précédente pour $x = n \in \mathbb{N}$

on aura $\Gamma(n+1) = n!\ \Gamma(1)$. or $\Gamma(1) = 1$.

d'où $\Gamma(n+1) = n! \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$. ■

8.14 1) Soit $\lambda \in \mathbb{R}^*_+$ et $\alpha \in \mathbb{R}$. Trouver les valeurs de α pour lesquelles l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} t^{\alpha} dt \quad \text{est convergente.}$$

2) a) Soit $x \in \mathbb{R}$, montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} \cos(tx)\, dt$ est absolument convergente

b) Soit f la fonction définie par

$$f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} \cos(tx)\, dt$$ montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.

Solution

1) $\lambda > 0$ et $\alpha \in \mathbb{R}$, posons $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-\lambda t}. t^{\alpha} dt = I_1 + I_2$.

où
$$I_1 = \int_0^1 e^{-\lambda t} t^{\alpha} dt \quad \text{et } I_2 = \int_1^{+\infty} e^{-\lambda t} t^{\alpha} dt .$$

étudions la convergence de I_1 et de I_2 .

pour I_1 : au voisinage de 0 on a $e^{-\lambda t} t^{\alpha} \sim t^{\alpha}$.

donc puisqu'on est en présence d'une fonction positive, I_1 se comporte comme

$\displaystyle\int_0^1 t^{\alpha} dt$ intégrale de Riemann qui converge si $\alpha > -1$ (diverge si $\alpha \leq -1$) .

pour I_2 : quand $t \longrightarrow +\infty$ on a $t^{\beta} e^{-\lambda t} \longrightarrow 0 \ \forall \beta \in$ car $\lambda > 0$

Donc la fonction $g(t) = t^{\beta} e^{-\lambda t}$ est bornée au voisionage de $+\infty$, ($\forall \beta \in \mathbb{R}$).
c'est-à-dire, pour tout $\beta \in \mathbb{R}$, il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que $t^{\beta} e^{-\lambda t} \leq M$ pour t assez grand.

En particulier si $\beta = \alpha + 2$ on aura alors : $t^{\alpha} e^{-\lambda t} \leq \dfrac{M}{t^2}$

C'est-à-dire que I_2 sera majorée par une intégrale de Riemann convergente, donc I_2 converge et celà pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$. En définitive I_1 converge si $\alpha > -1$ et I_2 converge pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$ donc I converge quand les deux inégrales I_1 et I_2 sont en même temps convergentes, c'est á dire si $\alpha > -1$.

2) a) on a :

$$\left| \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} \cos(tx)\, dt \right| \leq \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} |\cos(tx)|\, dt \leq \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} dt = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{-\frac{1}{2}} dt$$

Donc l'intégrale $\int_0^{+\infty} \left| \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} \cos tx \right| dt$ est convergente, car elle est majorée par une intégrale convergente ($\lambda = 1$ et $\alpha = -\frac{1}{2} > -1$) d'après la première question.

Ce qui démontre la convergence absolue de l'intégrale donnée.

b) $f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} \cos(tx)\, dt$, soit $x_o \in \mathbb{R}$, montrons que f est continue en x_o

$$f(x) - f(x_o) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} (\cos(tx) - \cos(tx_0))\, dt = -2 \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} \sin \frac{t(x - x_o)}{2} \sin \frac{t(x + x_o)}{2}\, dt .$$

Comme pour tout $u \in \mathbb{R}$: $|\sin u| < |u|$ on a :

$$|f(x) - f(x_0)| \leq |x - x_0| \int_0^{+\infty} e^{-t} \sqrt{t}\, dt = |x - x_0|\, I .$$

avec : $I = \int_0^{+\infty} e^{-t} \sqrt{t}\, dt$ qui est convergente ($\lambda = 1$ et $\alpha = \frac{1}{2} > -1$).

donc I est finie

Alors si $x \to x_o$ on aura $f(x) \to f(x_o)$, c'est-à-dire que f est continue en x_o . ■

8.15

> Soit a,b tels que o< a < b et f une fonction définie et continue sur $[0,+\infty[$.
>
> On suppose que la fonction $t \longrightarrow \frac{f(t)}{t}$ est intégrable sur $[1,+\infty[$.
>
> 1) Montrer que la fonction $x \longrightarrow \frac{f(kx)}{x}$ est intégrable sur $[u,+\infty[$ $\forall\, u > 0$ et $k > 0$.
>
> 2) Montrer que $\int_u^{+\infty} \frac{f(bx) - f(ax)}{x}\, dx = \int_{bu}^{au} \frac{f(t)}{t}\, dt$.
>
> 3) Montrer que la fonction $x \longrightarrow \frac{f(bx) - f(ax)}{x}$ est intégrable sur $[0,+\infty[$ et $\int_0^{+\infty} \frac{f(bx) - f(ax)}{x}\, dx = f(o) \operatorname{Log} \frac{a}{b}$.
>
> 4) Prouver la convergence de l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-bt} - e^{-at}}{t}\, dt$ et calculer sa valeur

Solution

1) La fonction $\frac{f(t)}{t}$ est intégrable sur $[1,+\infty[$ définie et continue sur $]0,+\infty]$

posons $t = kx$. On a donc

$$I = \int_u^{+\infty} \frac{f(kx)}{x}\,dx = \lim_{y\to+\infty} \int_u^y \frac{f(kx)}{x}\,dx = \lim_{y\to+\infty}\int_{uk}^{ky} \frac{f(t)\,dt}{t}.$$

$$= \int_{uk}^{1} \frac{f(t)}{t}\,dt + \int_1^{+\infty} \frac{f(t)}{t}\,dt$$

$$= I_1 + I_2$$

Les deux intégrales I_1 et I_2 sont convergentes, car la première est une intégrale définie et la deuxième est convergente d'après l'hypothèse.

2) on a montré ci-dessus que :

$$\int_u^{+\infty} \frac{f(kx)}{x}\,dx = \int_{uk}^{+\infty} \frac{f(t)}{t}\,dt. \qquad \forall k > 0.$$

D'où : si $k = b$
$$\int_u^{+\infty} \frac{f(bx)}{x}\,dx = \int_{ub}^{+\infty} \frac{f(t)}{t}\,dt.$$

si $k = a$
$$\int_u^{+\infty} \frac{f(ax)}{x}\,dx = \int_{ua}^{+\infty} \frac{f(t)}{t}\,dt.$$

Par suite :
$$\int_u^{+\infty} \frac{f(bx) - f(ax)}{x}\,dx = \int_{bu}^{au} \frac{f(t)}{t}\,dt.$$

3) on a
$$\int_0^{+\infty} \frac{f(bx) - f(ax)}{x}\,dx = \lim_{u\to 0^+} \int_u^{+\infty} \frac{f(bx) - f(ax)}{x}\,dx = \lim_{u\to 0^+} \int_{bu}^{au} \frac{f(t)}{t}\,dt.$$

or
$$\frac{f(t)}{t} = \frac{f(o)}{t} + \frac{f(t) - f(o)}{t}$$

d'où
$$\left|\int_{ub}^{ua} \frac{f(t)}{t}\,dt\right| \le \int_{ub}^{ua} \left|\frac{f(t)}{t}\right| dt \le \int_{ub}^{ua} \left|\frac{f(o)}{t}\right| dt + \int_{ub}^{ua} \left|\frac{f(t) - f(o)}{t}\right| dt.$$

$$\leq |f(o)| \operatorname{Log}\left(\frac{a}{b}\right) + \int_{ub}^{ua} \sup_{t \in [ua,ub]} |f(t) - f(o)| \cdot \frac{dt}{t}.$$

$$\leq | f(o) | \operatorname{Log} \left(\frac{a}{b}\right) + \sup_{t \in [ua,ub]} | f(t) - f(o) | \cdot \operatorname{Log}\left(\frac{a}{b}\right).$$

Or si $u \to 0$, $\sup_{t \in [ua,ub]} | f(t) - f(o) | \longrightarrow 0$.

donc $\lim_{u \to 0^+} \left| \int_u^{+\infty} \frac{f(bx) - f(ax)}{x} dx \right| \leq | f(o) | \operatorname{Log} \frac{a}{b}$

Donc la fonction $\frac{f(bx) - f(ax)}{x}$ est intégrable sur $[0 , + \infty [$.

D'autre part on a : $\int_{bu}^{au} \frac{f(t)}{t} dt = \int_{bu}^{au} \frac{f(o)}{t} dt + \int_{bu}^{au} \frac{f(t) - f(o)}{t} dt = f(o) \operatorname{Log} \frac{a}{b} + I_u$.

avec $I_u = \int_{bu}^{au} \frac{f(t) - f(o)}{t} dt$. Montrons que $\lim_{u \to o} I_u = 0$

on a $| I_u | \leq \int_{bu}^{au} \left|\frac{f(t) - f(o)}{t}\right| dt \leq \sup_{t \in [bu,au]} | f(t) - f(o) | \cdot \operatorname{Log} \frac{a}{b} \xrightarrow[u \to 0]{} 0$.

donc $\lim_{u \to 0} I_u = 0$. D'où $\int_0^{+\infty} \frac{f(bx) - f(ax)}{x} dx = f(o) \operatorname{Log} \frac{a}{b}$.

4) Cette question n'est qu'une application de ce qui précède pour f définie par $f(t) = e^{-t}$ f est définie et continue sur $[0,+ \infty [$.

La fonction $t \longrightarrow \frac{e^{-t}}{t}$ est intégrable sur $[1,+ \infty [$.

(verifier le) !

donc $I = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-bt} - e^{-at}}{t} dt$ est convergente

et $I = f(o) \operatorname{Log} \frac{a}{b} = \operatorname{Log} \frac{a}{b}$.

■

DEVELOPPEMENT LIMITE

9.1 Les fonctions suivantes admettent-elles des développements limités (DL) à l'ordre 1 au voisinage de 0 :

$$f(x) = \operatorname{Log}|x| \qquad g(x) = \sin\frac{1}{x} \qquad h(x) = \sin\sqrt{|x|}\,.$$

Solution

Une condition nécessaire d'existence d'un DL au voisinage de x_o est que la fonction admette une limite finie quand x tend vers x_o .

Ce qui n'est pas le cas pour les fonctions f et g ainsi ces fonctions ne peuvent admettre de D.L. au voisinage de 0.

Supposons que : $\sin\sqrt{|x|} = a_o + a_1 x + x\,\varepsilon(x)$ avec $\lim\limits_{x \to 0} \varepsilon(x) = 0$

On déduit, en faisant tendre x vers 0 que $a_o = 0$

et que $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin\sqrt{|x|}}{x} = \lim\limits_{x \to 0} (a_1 + \varepsilon(x)) = a_1$.

ce qui est absurde, puisque : $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \dfrac{\sin\sqrt{x}}{x} = +\infty$ ■

9.2 Discuter suivant les valeurs de l'entier naturel n l'existence d'un DL à l'ordre 2 au voisinage de o de la fonction définie par : $f(x) = x^n \sin\dfrac{1}{x}$.

Que peut-on dire de l'existence d'un DL à l'ordre k au voisinage de o, $k \in \mathbb{N}$.

Solution

D'après l'exercice 9.1 la fonction $\sin\dfrac{1}{x}$ n'admet de DL à aucun ordre au voisinage de 0, ce qui élimine le cas n = 0, prenons donc $n \geq 1$ et supposons que f admette le DL suivant :

$x^n \sin\dfrac{1}{x} = a_o + a_1 + a_2 x^2 + x^2 \varepsilon(x)$, $n \geq 1$ entraîne que $a_o = \lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$

On a alors, en divisant par x : $x^{n-1} \sin\dfrac{1}{x} = a_1 + a_2 x + x\,\varepsilon(x)$.

un tel DL ne peut exister que si $n - 1 \geq 1$.

De même, $n \geq 2$ entraine que $a_1 = 0$.

En redivisant par x, on obtient :

$x^{n-2}\sin\dfrac{1}{x} = a_2 + \varepsilon(x)$. Et finalement $n - 2 \geq 1$.

Ainsi pour que f admette un DL à l'ordre 2 au voisinage de 0, il faut que $n \geq 3$.
Montrons que cette dernière condition est suffisante.
En effet, si $n \geq 3$

$$x^n \sin\frac{1}{x} = x^n\varepsilon(x) \quad \text{avec} \quad \varepsilon(x) = x^{n-2}\sin\frac{1}{x} \quad \text{on a bien} \quad \lim_{x\to 0}\varepsilon(x) = 0.$$

Ainsi f admet un DL d'ordre 2 dont la partie régulière est le polynôme nul.
Supposons que f admet le DL d'ordre k suivant :

$$x^n \sin 1/x = a_o + a_1x + \ldots + a_k x^k + o(x^k) \qquad (1)$$

Montrons que tous les a_i sont nuls. En effet, dans le cas contraire on peut écrire :

$$x^n \sin 1/x = a_p x^p + a_{p+1} x^{p+1} + \ldots + a_k x^k + o(x^k) \qquad (2)$$

avec $p \leq k$ et $a_p \neq 0$.

- Supposons que $n \geq p$. En divisant (2) par x^p on obtient :

$$x^{n-p} \sin 1/x = a_p + a_{p+1} + \ldots + a_k x^{k-p} + o(x^{k-p})$$

on a alors $a_p = \lim\limits_{x \to 0} x^{n-p} \sin 1/x$

Si $n = p$ on doit avoir $a_p = \lim\limits_{x \to 0} \sin 1/x$. Absurde.

Si $n > p$ on aurait alors $a_p = 0$. Ce qui contredit l'hypothèse.

- Supposons que $n < p$. En divisant (2) or x^n on obtient :

$$\sin 1/x = a_p x^{p-n} + \ldots + a_k x^{k-n} + o(x^{k-n})$$

Ce qui conduit à $\lim\limits_{x \to 0} \sin 1/x = 0$. Absurde.

Donc finalement tous les a_i sont nuls et (1) devient $x^n \sin 1/x = o(x^k)$

On ne peut avoir $k \geq n$ car sinon on aurait

$$\sin 1/x = o(x^{k-n}) \quad \text{et alors} \quad \lim_{x \to 0} \sin 1/x = 0.$$

Ainsi une condition nécessaire d'existence du DL (1) est que

$$n > k \quad \text{et } a_o = a_1 = \ldots = a_k = 0$$

La condition suffisante est évidente puisque

$$n > k \quad \Rightarrow \quad x^n \sin 1/x = o(x^k)$$ ■

9.3 Trouver le DL à l'ordre 5 au voisinage 0 de la fonction f définie par :

$f(x) = a \sin bx - b \sin ax$ avec $a, b \in \mathbb{R}$.

Solution

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3\,!} + \frac{x^5}{5\,!} + o\,(x^5)$$

$$\sin bx = bx - \frac{b^3\,x^3}{3\,!} + \frac{b^5\,x^5}{5\,!} + o\,(x^5)$$

$$a \sin bx = a\,bx - \frac{a\,b^3}{3\,!}\,x^3 + \frac{ab^5}{5\,!}\,x^5 + o\,(x^5)\,.$$

De même, $\quad b \sin ax = b\,ax - \frac{ba^3}{3\,!}\,x^3 + \frac{ba^5}{5\,!}\,x^5 + o\,(x^5)\,.$

$$f(x) = \frac{ab\,(a^2 - b^2)}{3\,!}\,x^3 - \frac{ab\,(\,a^4 - b^4)}{5\,!}\,x^5 + o\,(x^5)\,.$$

■

9.4 Soient f et g les fonctions définies par : $f(x) = \operatorname{tg} x$ et $g(x) = \sin(\operatorname{tg}x) - \operatorname{tg}(\sin x)$
Determiner le DL à l'ordre 5 au voisinage de 0 de f et en déduire que g est négligeable devant x^5 au voisinage de 0.

Solution

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3\,!} + \frac{x^5}{5\,!} + o\,(x^5) \qquad \text{et} \qquad \cos x = 1 - \frac{x^2}{2\,!} + \frac{x^4}{4} + o\,(x^5)$$

Appelons P(x) et Q(x) les parties régulières respectives de ces DL. Puisque $Q(o) \neq 0$, on obtient le DL de tgx en faisant la division suivant les puissances croissantes jusqu'à l'ordre 5 de P(x) par Q(x). Ce qui nous permet d'écrire :

$$P(x) = Q(x)\left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}\,x^5\right) + o\,(x^5)\,.$$

Et finalement : $\quad \operatorname{tg} x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}\,x^5 + o\,(x^5)\,.$

Cherchons le DL à l'ordre 5 au voisinage de 0 de la fonction g.

Posons $\quad u = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}\,x^5\,. \qquad$ On a $\quad \sin(\operatorname{tg} x) = u - \frac{u^3}{3\,!} + \frac{u^5}{5\,!} + o\,(u^5)\,.$

Or $\quad u^3 = x^3 + x^5 + o\,(x^5)$ et $u^5 = u^5 + o\,(x^5)\,.$

Ainsi $\quad \sin(\operatorname{tg} x) = \left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}\,x^5\right) - \frac{1}{3\,!}\,(x^3 + x^5) + \frac{x^5}{5\,!} + o(x^5)\,.$

$$\sin(\operatorname{tg} x) = x + \frac{x^3}{6} - \frac{x^5}{40} + o(x^5)\,.$$

De même, en posant $\; v = x - \frac{x^3}{3\,!} + \frac{x^5}{5\,!}$, on a : $\; \operatorname{tg}(\sin x) = v + \frac{v^3}{3} + \frac{2}{15}\,v^5 + o\,(v^5)\,.$

Or $v^3 = x^3 - \frac{x^5}{2} + o(x^5)$ et $v^5 = x^5 + o(x^5)$.

On a donc : $\operatorname{tg}(\sin x) = \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}\right) + \frac{1}{3}\left(x^3 - \frac{x^5}{2}\right) + \frac{2x^5}{15} + o(x^5)$.

D'où : $\operatorname{tg}(\sin x) = x + \frac{x^3}{6} - \frac{x^5}{40} + o(x^5)$.

Ainsi, $g(x) = o(x^5)$.

Et donc finalement g est negligeable **devant x^5 au voisinage de 0.** ■

9.5

> Soient f et g des fonctions **admettant des DL à l'ordre** n **au** voisinage de 0.
>
> On suppose que $f(x) = \sum_{k=p}^{n} a_k x^k + o(x^n)$ **avec** $0 < p \leq n$ et $a_p \neq 0$.
>
> Montrer que l'ordre minimal q, **auquel il faut developper** g(x) pour obtenir le DL à l'ordre n de $g \circ f(x)$ est $\mathbf{q = E(n/p)}$.

Solution

Puisque la limite de f en 0 est nulle, on **peut déduire le DL de g o f** à l'ordre n à partir des DL à l'ordre n des fonctions f **et g . Ainsi q ≤ n.**

Considérons le DL à l'ordre n de g :

$$g(x) = \sum_{k=0}^{n} b_k x^k + o(x^n).$$

$$g(f(x)) = \sum_{k=0}^{n} b_k f^k(x) + o(f^n(x)).$$

Posons $P(x) = \sum_{k=p}^{n} a_k x^k$. On a **pour tout $k \geq p$, $f^k(x) = P^k(x) + o(x^n)$.**

Par ailleurs puisque $f(x) \underset{0}{\sim} a_p x^p$. **donc** $o(f^n(x)) = o(x^{pn})$.

Finalement, $g(f(x) = \sum_{k=0}^{n} b_k P^k(x) + o(x^n)$. Or $P^k(x) = o(x^n)$ si $k.p > n$.

Ainsi l'ordre minimal q recherché est le plus grand entier k tel que $kp \leq n$.

On en déduit que $q = E(n/p)$.

En particulier si n est un multiple de p il faut utiliser un DL de g(x) à l'ordre $q = n/p$ ■

9.6

> Déterminer le DL à l'ordre 6 au voisinage de 0 de la fonction définie par :
>
> $f(x) = \operatorname{Log}(1 + x \sin x)$

Solution

$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^5)$.

$$x \sin x = x^2 - \frac{x^4}{3!} + \frac{x^6}{5!} + o(x^6).$$

Puisque cette dernière fonction est d'ordre deux il suffit de developper log (1 +x) à l'ordre 3 pour obtenir le DL de f à l'ordre 6, (voir l'exercice précédent).
Posons

$$u = x^2 - \frac{x^4}{3!} + \frac{x^6}{5!}.$$

$$\text{Log}(1 + x \sin x) = u - \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3} + o(u^3).$$

$$u^2 = x^4 - \frac{x^6}{3} + o(x^6) \quad \text{et} \quad u^3 = x^6 + o(x^6).$$

$$\text{Ainsi, } f(x) = \left(x^2 - \frac{x^4}{3!} + \frac{x^6}{5!}\right) - \frac{\left(x^4 - \frac{x^6}{3}\right)}{2} + \frac{x^6}{3} + o(x^6).$$

$$\text{Log}(1 + x \sin x) = x^2 - \frac{2}{3}x^4 + \frac{61}{5!}x^6 + o(x^6).$$

9.7 En utilisant la relation $\text{th}' x = 1 - \text{th}\, x^2 \quad \forall x \in]-1, 1[$, trouver le DL à l'ordre 5 au voisinage de 0 de la fonction tangente hyperbolique.

Solution

La fonction définie par f(x) = thx est indéfiniment dérivable au voisinage de 0, elle y admet donc un DL à n'importe quel ordre.
Elle est en outre impaire, son DL ne contient donc que des monômes de degré impair

Posons $\quad \text{th}\, x = ax + bx^3 + cx^5 + o(x^5).$

Ainsi $\quad \text{th}^2 x = (ax + bx^3 + cx^5)^2 + o(x^5).$

$$= a^2x^2 + 2abx^4 + o(x^5).$$

La partie régulière du DL de f à l'ordre 5 étant la même que celle du DL de f à l'ordre 6, on a :

$$\text{th}' x = a + 3bx^2 + 5cx^4 + o(x^5)$$

On obtient : $\quad a + 3bx^2 + 5cx^4 + o(x^5) = 1 - a^2x^2 - 2abx^4 + o(x^5).$

Il résulte de l'unicité du DL que :

$$\begin{cases} a = 1 \\ 3b = -a^2 \\ 5c = -2ab \end{cases} \Leftrightarrow a = 1 \quad b = -\frac{1}{3} \quad c = \frac{2}{15}.$$

Finalement : $\quad \text{th}\, x = x - \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{2x^5}{15} + o(x^5).$

9.8 Déterminer le DL à l'ordre 4 au voisinage de 0 de chacune des fonctions suivantes :

$$f(x) = \frac{x}{\cos x} \quad , \quad g(x) = \frac{x}{\sin x}$$

Solution

$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4\,!} + o\,(x^4)$.

La division suivant les puissances croissantes jusqu'à l'ordre 4 de x par

$$P(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4\,!} \quad \text{donne} \quad x = (x + \frac{x^3}{2})\ P\,(x) + o\,(x^4).$$

Ainsi $\frac{x}{\cos x} = x + \frac{x^3}{2} + o\,(x^4)$.

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3\,!} + \frac{x^5}{5\,!} + o\,(x^5) \text{ d'où pour } x \neq 0 : \quad \frac{x}{\sin x} = \frac{1}{1 - \frac{x^2}{3\,!} + \frac{x^4}{5\,!} + o\,(x^4)} .$$

Effectuons la division suivant les puissances croissantes du numérateur par le dénominateur. Cela donne :

$$1 = \left(1 + \frac{x^2}{6} + \frac{7}{360}x^4\right)\left(1 - \frac{x^2}{3\,!} + \frac{x^4}{5\,!}\right) + o\,(x^4)$$

Finalement $$\frac{x}{\sin x} = 1 + \frac{x^2}{6} + \frac{7}{360}x^4 + o\,(x^4) .$$ ■

Remarque : On aurait obtenu un résultat erroné si on avait divisé x par la partie régulière du DL à l'ordre 4 de sin x. En effet il faut d'abord s'assurer que le polynôme par lequel on divise ne s'annule par en 0 (voir Tome 1 page 210).

9.9 Donner le DL à l'ordre 3 de f o g - g o f au voisinage de 0, sachant que

$$f(x) = \sum_{k=1}^{3} a_k\, x^k + o\,(x^3) .$$

$$g(x) = \sum_{k=1}^{3} b_k\, x^k + o\,(x^3) .$$

Elle deduire que la fonction $$h(x) = \frac{\text{Log}\,(1 + x)}{1 - \text{Log}^2\,(1 + x)} - \text{Log}\left(1 + \frac{x}{1 - x^2}\right).$$

est négligeable devant x^3 au voisinage de 0.

Solution

Posons : $u = b_1\, x + b_2\, x^2 + b_3\, x^3$.

$u^2 = b_1^2\, x^2 + 2\, b_1\, b_2 x^3 + o\,(x^3)$.

$u^3 = b_1^3\, x^3 + o\,(x^3)$.

$f(g(x)) = a_1 u + a_2 u^2 + a_3 u^3 + o(u^3)$.

$f \circ g(x) = a_1 b_1 x + (a_1 b_2 + a_2 b_1^2) x^2 + (a_1 b_3 + 2 a_2 b_1 b_2 + a_3 b_1^3) x^3 + o(x^3)$.

De même

$g \circ f(x) = b_1 a_1 x + (b_1 a_2 + b_2 a_1^2) x^2 + (b_1 a_3 + 2 b_2 a_1 a_2 + b_3 a_1^3) x^3 + o(x^3)$.

$$f \circ g(x) - g \circ f(x) = (a_1 b_2 - b_1 a_2 + a_2 b_1^2 - b_2 a_1^2) x^2 + (a_1 b_3 - b_1 a_3 + 2 a_2 b_2 (b_1 - a_1) + a_3 b_1^3 - b_3 a_1^3) x^3 + o(x^3).$$

Application aux fonctions : $f(x) = \dfrac{x}{1 - x^2}$ et $g(x) = \text{Log}(1 + x)$.
On a bien $h = f \circ g - g \circ f$.

Or $\dfrac{1}{1 - x} = 1 + x + o(x)$ donc $\dfrac{1}{1 - x^2} = 1 + x^2 + o(x^2)$ et $\dfrac{x}{1 - x^2} = x + x^3 + o(x^3)$.

Ainsi $a_1 = 1$ $a_2 = 0$ $a_3 = 1$.

$\text{Log}(1 + x) = x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} + o(x^3)$ entraîne que $b_1 = 1$, $b_2 = \dfrac{-1}{2}$, $b_3 = \dfrac{1}{3}$.

En remplaçant les a_2 et b_2 par leus valeurs dans le developpement de $f \circ g - g \circ f$ on obtient $h(x) = o(x^3)$. ■

9.10 Déterminer le DL au voisinage de 0 de la fonction f à l'ordre n indiqué

a) $f(x) = \text{Log}(1 + \text{th } x)$ $(n = 5)$

b) $f(x) = \text{Log}\dfrac{x}{\sin x}$. $(n = 4)$

Solution

a - Nous avons déjà determiné le DL à l'ordre 5 au voisinage de 0 de la fonction tangente hyperbolique (voir Exercice 9.7)
On peut l'obtenir directement, en faisant la division suivant les puissances croissantes jusqu'à l'ordre 5 de la partie régulière du DL

$$\text{Sh } x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^5).$$

Par celle de : $\text{ch } x = 1 + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^4}{4!} + o(x^5)$.

On a donc : $\text{th } x = x - \dfrac{x^3}{3} + 2\dfrac{x^5}{15} + o(x^5)$.

posons $u = x - \dfrac{x^3}{3} + 2\dfrac{x^5}{15}$, alors $\text{Log}(1 + \text{th } x) = u - \dfrac{u^2}{2} + \dfrac{u^3}{3} - \dfrac{u^4}{4} + \dfrac{u^5}{5} + o(u^5)$.

$$\text{Log}(1 + \text{th } x) = \left(x - \frac{x^3}{3} + 2\frac{x^5}{15}\right) - \frac{1}{2}\left(x^2 - 2\frac{x^4}{3}\right) + \frac{1}{3}(x^3 - x^5) - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} + o(x^5).$$

Finalement $\text{Log}(1 + \text{th } x) = x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^4}{12} + o(x^5)$.

b - On a obtenu à l'exercice 8 le résultat suivant .

$$\frac{x}{\sin x} = 1 + \frac{x^2}{6} + 7\frac{x^4}{360} + o\,(x^4)\,.$$

$$\text{Ainsi } \operatorname{Log}\frac{x}{\sin x} = \left(\frac{x^2}{6} + 7\frac{x^4}{360}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{6} + 7\frac{x^4}{360}\right)^2 + o\,(x^4) = \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{180} + o\,(x^4)\,. \quad \blacksquare$$

9.11 Déteriner le DL à l'ordre 4 au voisinage de o de la fonction :

$$f(x) = e^{\frac{\text{Arctg } x}{x}}$$

Solution

$\text{Arctg}'\, x = \dfrac{1}{1+x^2}$ or $\dfrac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 + o\,(x^2)$. On en déduit

$\dfrac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 + o\,(x^4)$ et puisque Arctg 0 = 0 , on obtient par intégration :

$\text{Arctg } x = x - \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^5}{5} + o\,(x^5)\,.$ et $\dfrac{\text{Arctg } x}{x} = 1 - \dfrac{x^2}{3} + \dfrac{x^4}{5} + o\,(x^4)\,.$

posons $v(x) = \dfrac{\text{Arctg } x}{x} - 1$ on a $v\,(x) = -\dfrac{x^2}{3} + \dfrac{x^4}{5} + o\,(x^4)\,.$ Ce qui donne :

$$e^{v(x)} = 1 + \left(-\frac{x^2}{3} + \frac{x^4}{5}\right) + \frac{1}{2}\left(-\frac{x^2}{3} + \frac{x^4}{5}\right)^2$$

$$= 1 - \frac{x^2}{3} + 23\frac{x^4}{90} + o\,(x^4)\,.$$

or $f(x) = e^{1 + v\,(x)}$ Par suite : $f(x) = e\left[1 - \dfrac{x^2}{3} + 23\dfrac{x^4}{90}\right] + o\,(x^4)$ $\blacksquare$

9.12 Donner les DL à l'ordre 4 au voisinage de 0 des fonctions :

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg} x}} \quad \text{et} \quad g(x) = \sqrt{1 + e^{x \cos x}}$$

Solution

En utilisant la formule

$$(1+u)^\alpha = 1 + \alpha u + \frac{\alpha\,.\,(\alpha-1)}{2!}u^2 + \frac{\alpha\,(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}u^3 + \frac{\alpha\,(\alpha-1)(\alpha-2)(\alpha-3)}{4!}u^4 + o\,(u^4)$$

On déduit en prenant $\alpha = -\dfrac{1}{2}$ que

$$\frac{1}{\sqrt{1+u}} = 1 - \frac{1}{2}u + \frac{3}{8}u^2 - \frac{5}{16}u^3 + \frac{35}{128}u^4 + o\,(x^4)\,.$$

Par ailleurs $\operatorname{tg} x = x + \dfrac{x^3}{3} + o\,(x^4)\,.$

Ainsi $\dfrac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg} x}} = 1 - \dfrac{1}{2}\left(x+\dfrac{x^3}{3}\right) + \dfrac{3}{8}\left(x+\dfrac{x^3}{3}\right)^2 - \dfrac{5}{16}x^3 + \dfrac{35}{128}x^4 + o\,(x^4).$

Par conséquent : $f(x) = 1 - \dfrac{1}{2}x + \dfrac{3}{8}x^2 - \dfrac{23}{48}x^3 + \dfrac{67}{128}x^4 + o\,(x^4)$.

Détermination du DL de g :

$e^u = 1 + u + \dfrac{u^2}{2} + \dfrac{u^3}{6} + \dfrac{u^4}{24} + o\,(x^4)$. et $x \cos = x - \dfrac{x^3}{2} + o\,(x^4)$.

$$\text{Ainsi} \quad e^{x \cos x} = 1 + \left(x - \frac{x^3}{2}\right) + \frac{1}{2}\left[x - \frac{x^3}{2}\right]^2 + \frac{x^3}{6} + \frac{x^6}{24} + o\,(x^4).$$

$$e^{x \cos x} = 1 + x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - 11\frac{x^4}{24} + o\,(x^4)\ .$$

$$(1 + e^{x \cos x})^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}\left(1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{4} - \frac{x^3}{6} - 11\frac{x^4}{48} + o\,(x^4)\right)^{\frac{1}{2}}$$

Or $\quad (1+u)^{\frac{1}{2}} = 1 + \dfrac{1}{2}u - \dfrac{1}{8}u^2 + \dfrac{1}{16}u^3 - \dfrac{5}{128}u^4 + o\,(u^4)$.

Maintenant, en posant $u = \dfrac{x}{2} + \dfrac{x^2}{4} - \dfrac{x^3}{6} - \dfrac{11}{48}x^4$, cela donne :

$$g(x) = \sqrt{2}\left(1 + \frac{1}{2}u - \frac{1}{8}u^2 + \frac{1}{16}u^3 - \frac{5}{128}u^4 + o\,(u^4)\right).$$

$u^2 = \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{x^3}{4} - 5\dfrac{x^4}{48} + o\,(x^4)$.

$u^3 = \dfrac{x^3}{8} + \dfrac{3}{16}x^4 + o\,(x^4).$

$u^4 = \dfrac{x^4}{16} + o\,(x^4)$ et, aprés substitution, il s'en suit :

$$g(x) = \sqrt{2}\left(1 + \frac{x}{4} + \frac{3\,x^2}{32} - \frac{41}{384}x^3 - \frac{189\,x^4}{2048}\right) + o\,(x^4)\ .$$

■

9.13 Soit f la fonction définie par $f(x) = \dfrac{x}{e^x - 1}$.

1) Montrer qu'au voisinage de 0 la fonction f admet un developpement limité à un ordre n quelconque (on ne cherchera pas explicitement le developpement limité de f)

2) on pose $f(x) = B_0 + B_1\dfrac{x}{1\,!} + B_2\dfrac{x^2}{2\,!} + \ldots + B_n\dfrac{x^n}{n\,!} + o\,(x^n)$. (1)

Déterminer une relation de récurrence liant les coefficients B_p .

En déduire les valeurs de B_0 , B_1 , B_2 , B_3 .

3) Démontrer en utilisant la fonction $f(x) = \dfrac{x}{e^x - 1} + \dfrac{x}{2}$.

que tous les coefficients B_p d'ordre impair excepté B_1 , sont nuls .

Solution

1) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction exponentielle admet le DL à l'ordre n + 1

$$e^x = 1 + \sum_{k=1}^{n+1} a_k x^k + o(x^{n+1}) \quad \text{avec } a_1 \neq 0 .$$

ainsi la fonction $g(x) = \dfrac{e^x - 1}{x}$ admet pour DL au voisinage de 0 le DL suivant

$$g(x) = \sum_{k=0}^{n} a_{k+1} x^k + o(x^n) .$$

Et puisque $a_1 \neq 1$ la fonction $f = \dfrac{1}{g}$ admet au voisinage de 0 un DL à l'ordre n.

2) On déduit de la relation (1) que :

$$x = \left(B_0 + B_1 \frac{x}{1!} + \dots + B_n \frac{x^n}{n!} + o(x^n) \right)(e^x - 1) .$$

$$x = \left(\frac{B_0}{0!} + B_1 \frac{x}{1!} + \dots + B_n \frac{x^n}{n!} + o(x^n) \right)\left(\frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n) \right).$$

$$x = \sum_{k=1}^{n} c_k x^k + o(x^n) .$$

avec $c_k = \displaystyle\sum_{j=0}^{k-1} \frac{B_j}{j!\,(k-j)!}$ pour $k = 1, \dots, n$

d'où $c_1 = 1$ et $c_k = 0$ si $k \geq 2$.

Ainsi $B_o = 1$, et pour tout $k \geq 2$ on a : $\dfrac{B_0}{0!\,k!} + \dfrac{B_1}{1!\,(k-1)!} + \dots + \dfrac{B_{k-1}}{(k-1)!\,1!} = 0$.

on en déduit que :

$$\begin{cases} B_0 = 1 \\ \dfrac{B_0}{2!} + \dfrac{B_1}{1!} = 0 \\ \dfrac{B_0}{0!\,3!} + \dfrac{B_1}{1!\,2!} + \dfrac{B_2}{2!\,1!} = 0 \\ \dfrac{B_0}{0!\,4!} + \dfrac{B_1}{1!\,3!} + \dfrac{B_2}{2!\,2!} + \dfrac{B_3}{3!\,1!} = 0 \end{cases}$$

Et finalement $B_0 = 1 \quad B_1 = \dfrac{-1}{2} \quad B_2 = \dfrac{1}{6} \quad B_3 = 0$.

3) $\varphi(x) = \dfrac{x}{e^x - 1} + \dfrac{x}{2} = \dfrac{x}{2}\left(\dfrac{e^x + 1}{e^x - 1} \right)$.

La fonction φ est paire. En effet :

$$\varphi(-x) = \frac{-x}{2}\left(\frac{e^{-x} + 1}{e^{-x} - 1} \right) = \frac{-x}{2}\left(\frac{1 + e^{+x}}{1 - e^{+x}} \right) = \frac{x}{2}\left(\frac{e^x + 1}{e^x - 1} \right).$$

D'un autre coté, φ admet le developpement suivant :

$$\varphi(x) = f(x) + \frac{x}{2} = f(x) - B_1 \frac{x}{1!} = B_0 + B_2 \frac{x^2}{2!} + B_3 \frac{x^3}{3!} + \dots + B_n \frac{x^n}{n!} + 0(x^4) .$$

Et puisque φ est paire tous les coefficients B_{2p+1} avec $p \in \mathbb{N}^*$ sont nuls . ■

9.14 Calculer la limite suivante, si elle existe :

$$L = \lim_{x \to 0} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{1 - \cos x}}$$

Solution

Soit $\quad y = \left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{1 - \cos x}}$

Lorsque x tend vers 0, y se présente sous la forme indéterminée 1^{∞} ,

$$y = e^{\mathrm{Log}\, y} \qquad \text{avec} \quad \mathrm{Log}\, y = \frac{1}{1 - \cos x} \mathrm{Log}\, \frac{\sin x}{x} .$$

au voisinage de 0, on a :

$$1 - \cos x = \frac{x^2}{2} + o\,(x^2) \qquad \text{et} \qquad \mathrm{Log}\, \frac{\sin x}{x} = \mathrm{Log}\left(1 - \frac{x^2}{6} + o\,(x^2)\right) .$$

Par conséquent :

$$\mathrm{Log}\, y = \frac{-\frac{x^2}{6} + o\,(x^2)}{\frac{x^2}{2} + o\,(x^2)} \longrightarrow -\frac{1}{3} \text{ quand x tend vers 0.}$$

finalement $\quad L = e^{-\frac{1}{3}}$ ■

9.15 Déterminer le developppement limité de la fonction $f(x) = (\cos x)^x$ au voisinage de zéro à l'ordre 5 .

Solution

on a $f(x) = e^{x \,\mathrm{Log} \cos x}$

au voisinage de zéro on a

$$\mathrm{Log} \cos x = \mathrm{Log}\left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + o\,(x^4)\right) = \mathrm{Log}\,(1 + v\,(x)) \quad \text{avec} \quad v\,(x) = -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!}$$

On a bien $\quad v(x) \xrightarrow[x \to 0]{} 0 \quad$ donc $\quad \mathrm{Log}\,(1 + v\,(x)) = v\,(x) - \frac{v^2(x)}{2} + o\,(v^2(x))$

D'où $\quad \mathrm{Log} \cos x = -\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12} + o\,(x^4)$.

$$x \,\mathrm{Log} \cos x = -\frac{x^3}{2} - \frac{x^5}{12} + o\,(x^5) .$$

$$(\cos x)^x = e^{x \,\mathrm{Log} \cos x} = 1 - \frac{x^3}{2} - \frac{x^5}{12} + o\,(x^5) .$$ ■

9.16 Calculer la limite suivante :

$$L = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} (\sin x)^{\mathrm{tg}^2 x}.$$

solution

quand $x \to \frac{\pi}{2}$, $y = (\sin x)^{\mathrm{tg}^2 x}$ se présente sous la forme indéterminée 1^∞

Posons $h = \frac{\pi}{2} - x$, si $x \to \frac{\pi}{2}$ alors $h \to 0$.

donc $y = (\cos h)^{\frac{1}{\mathrm{tg}^2 h}} = e^{\mathrm{Log}\, y}$, $\mathrm{Log}\, y = \frac{1}{\mathrm{tg}^2 h}\,\mathrm{Log} \cos h$.

au voisinage de 0, on aura

$$\mathrm{Log}\, y = \frac{1}{h^2 + o(h^2)} \mathrm{Log}\left(1 - \frac{h^2}{2} + o(h^2)\right) = \frac{-\frac{h^2}{2} + o(h^2)}{h^2 + o(h^2)} \xrightarrow[h \to 0]{} -\frac{1}{2}.$$

donc $L = e^{-\frac{1}{2}}$. ■

9.17 Soit la fonction définie par $f(x) = \mathrm{Log}\left(\frac{\mathrm{Log}\, x}{x - 1}\right)$.

Calculer le DL de f à l'ordre 3 au voisinage de 1 .

Solution

Pour se ramener au cas des DL au voisinage de 0, faisons le changement de variable $t = x - 1$ et considérons la fonction $F(t) = f(1+t)$

$$F(t) = \mathrm{Log}\left(\frac{\mathrm{Log}(1+t)}{t}\right)$$

$$\mathrm{Log}(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} - \frac{t^4}{4} + o(t^4).$$

$$\frac{\mathrm{Log}(1+t)}{t} = 1 - \frac{t}{2} + \frac{t^2}{3} - \frac{t^3}{4} + o(t^3)$$

$$F(t) = u - \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3} + o(u^3) \qquad \text{avec} \qquad u = -\frac{t}{2} + \frac{t^2}{3} - \frac{t^3}{4} + o(t^3).$$

On obtient $F(t) = -\frac{t}{2} + \frac{5}{24}t^2 - \frac{t^3}{8} + o(t^3)$.

Et finalement $\mathrm{Log}\left(\frac{\mathrm{Log}\, x}{x - 1}\right) = -\frac{1}{2}(x-1) + \frac{5}{24}(x-1)^2 - \frac{1}{8}(x-1)^3 + o(x-1)^3$. ■

9.18 Calculer la limite suivante

$$\lim_{x \to +\infty} \sqrt[3]{x^3 + x + 1} - \sqrt{x^2 + x}\,.$$

Solution

Soit $f(x) = \sqrt[3]{x^3 + x + 1} - \sqrt{x^2 + x}$.
Au voisinage de $+\infty$, f(x) se présente sous la forme indeterminée $\infty - \infty$

$$f(x) = x\left(\left(1 + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3}\right)^{\frac{1}{3}} - \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{2}}\right).$$

On doit donc chercher la limite de

$g(x) = [(1 + t^2 + t^3)^{\frac{1}{3}} - (1 + t)^{\frac{1}{2}}]/t$. Lorsque t tend vers 0.

Or $(1 + t^2 + t^3)^{\frac{1}{3}} = 1 + \frac{1}{3}(t^2 + t^3) + o(t^3)$

$(1 + t)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}t + o(t)$. Ainsi $g(t) = -\frac{1}{2} + o(1)$

Et donc la limite recherchée est égale à $-\frac{1}{2}$. ■

9.19 Déterminer le DL au voisinage de $+\infty$ de la fonction définie par :

a) $f(x) = \text{Log}\left(x \sin \frac{1}{x}\right)$ à l'ordre 4

b) $f(x) = \left(\frac{x+1}{x}\right)^x$ à l'ordre 3

Solution

a) Par le changement $t = \frac{1}{x}$ on est amené à calculer le DL à l'ordre 4 au voisinage de 0 de la fonction $F(t) = \text{Log}\left(\frac{\sin t}{t}\right)$ développement qu'on a déjà trouvé à l'exercice 9.10

$$\text{Log}\left(\frac{\sin t}{t}\right) = \frac{t^2}{6} + \frac{t^4}{180} + o(t^4)\,.$$

ainsi, en revenant à x, au voisinage de $+\infty$ nous avons :

$$\text{Log}\left(x \sin \frac{1}{x}\right) = \frac{1}{6x^2} + \frac{1}{180x^4} + o\left(\frac{1}{x^4}\right).$$

b) $f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$

Posons $t = \frac{1}{x}$ et $F(t) = f\left(\frac{1}{t}\right)$ on a $F(t) = (1 + t)^{\frac{1}{t}} = e^{\frac{\text{Log}(1+t)}{t}}$

$$\text{Log}\,(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} - \frac{t^4}{4} + o\,(t^4).$$

$$\frac{\text{Log}\,(1+t)}{t} = 1 - \frac{t}{2} + \frac{t^2}{3} - \frac{t^3}{4} + o\,(t^3)\,.$$

Posons $u = -\frac{t}{2} + \frac{t^2}{3} - \frac{t^3}{4} + o\,(t^3)$ on a : $F(x) = e^{1+u} = e\,.\,e^u$.

$$F(x) = e\,.\left[1 + u + \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{6} + o\,(u^3)\right].$$

Ce qui donne :

$$(1+t)^{\frac{1}{t}} = e\left[1 - \frac{t}{2} + \frac{11}{24}t^2 - \frac{7}{16}t^3\right] + o\,(t^3)\,.$$

Finalement en revenant à x, on obtient le DL au voisinage de + ∞

$$\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e\left[1 - \frac{1}{2x} + \frac{11}{24\,x^2} - \frac{7}{16\,x^3}\right] + o\left(\frac{1}{x^3}\right).$$

■

9.20 Déterminer le DL à l'ordre 4 au voisinage de 0 la fonction définie par :

$$f(x) = \left(\frac{\text{Arctg}\,x}{\text{tg}\,x}\right)^n \quad \text{avec } n \in \mathbb{N}^*$$

Solution

Déterminons celui de $u\,(x) = \dfrac{\text{Arctg}\,x}{\text{tg}\,x}$

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 + o\,(x^4)\,.$$

On en déduit par intégration que $\text{Arctg}\,x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + o\,(x^5)\,.$

Nous avons déjà déterminé le DL au voisinage de 0 la fonction tangente (voir Ex 9.4)

$$\text{tg}\,x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 + o\,(x^5)\,.$$

Ainsi $u\,(x) = \dfrac{1 - \frac{x^2}{3} + \frac{x^4}{5} + o\,(x^4)}{1 + \frac{x^2}{3} + \frac{2}{15}x^4 + o\,(x^4)}\,.$

La division suivant les puissances croissantes donne

$$u\,(x) = 1 - \frac{2}{3}x^2 + \frac{13}{45}x^4 + o\,(x^4)\,.$$

$$f(x) = \left(1 - \frac{2}{3}x^2 + \frac{13}{45}x^4 + o\,(x^4)\right)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k\, x^{2k}\left(-\frac{2}{3} + \frac{13}{45}x^2\right)^k + o\,(x^4)$$

Or $x^{2k} = o(x^4)$ si $k > 2$ donc $f(x) = \sum_{k=0}^{2} C_n^k \, x^{2k}\left(-\frac{2}{3} + \frac{13}{45}x^2\right)^k + o(x^4)$.

avec la convention $C_n^k = 0$ si $n < k$.

Finalement $f(x) = 1 + n\,x^2\left(-\frac{2}{3} + \frac{13}{45}x^2\right) + \frac{n(n-1)}{2}x^4\left(-\frac{2}{3} + \frac{13}{45}x^2\right)^2 + o(x^4)$.

$$\left(\frac{\text{Arctg } x}{\text{tg } x}\right)^n = 1 - \frac{2n}{3}x^2 + \frac{n}{9}\left(\frac{3}{5} + 2n\right)x^4 + o(x^4) .$$

■

9.21 Déterminer le DL à l'ordre 5 au voisinage de $\frac{\pi}{4}$ de la fonction
$f(x) = \text{Log}(\text{tg } x)$

Solution

Par le changement de variable $t = x - \frac{\pi}{4}$ on se ramène au cas du DL au voisinage 0 de la fonction $F(t) = f\left(t + \frac{\pi}{4}\right)$.

$\text{tg}\left(t + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1 + \text{tg } t}{1 - \text{tg } t}$ et $F(t) = \text{Log}(1 + \text{tg } t) - \text{Log}(1 - \text{tg } t)$

$\text{tg } t = t + \frac{t^3}{3} + \frac{2t^5}{15} + o(t^5)$. D'où $\text{Log}(1 + \text{tg } t) = u - \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3} - \frac{u^4}{4} + \frac{u^5}{5} + o(u^5)$.

avec $u = t + \frac{t^2}{3} + \frac{2}{15}t^5$.

Ainsi $\text{Log}(1 + \text{tg } t) = t - \frac{1}{2}t^2 + \frac{2}{3}t^3 - \frac{7}{12}t^4 + \frac{2}{3}t^5 + o(t^5)$.

De même en remarquant que $\text{Log}(1 - \text{tg } t) = \text{Log}(1 + \text{tg}(-t))$. On obtient :

$$\text{Log}(1 - \text{tg } t) = -t - \frac{1}{2}t^2 - \frac{2}{3}t^3 - \frac{7}{12}t^4 - \frac{2}{3}t^5 + (t^5) .$$

$$F(t) = 2t + \frac{4}{3}t^3 + \frac{4}{3}t^5 + o(t^5) .$$

Finalement, $\text{Log}(\text{tg } x) = 2\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + \frac{4}{3}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^3 + \frac{4}{3}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^5 + o\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^5$.

■

COURBES PLANES PARAMETREES

10.1 Déterminer les points doubles, lorsqu'ils existent, de la courbe paramétrée par :

$$x(t) = \frac{2t}{t^2 - t - 2} \qquad \text{et} \quad y(t) = \frac{t+1}{t^2+2} \ .$$

Solution

Première méthode : Cela revient à résoudre le système

$$\begin{cases} x(t_1) = x(t_2) \\ y(t_1) = y(t_2) \end{cases} \quad \text{et} \quad t_1 \neq t_2$$

Dans notre cas cela donne

$$\begin{cases} (2t_1 - 1)(t_2^2 - t_2 - 2) = (2t_2 - 1)(t_1^2 - t_1 - 2) \\ (t_1 + 1)(t_2^2 + 2) = (t_2 + 1)(t_1^2 + 2) \end{cases} \qquad \text{et} \quad t_1 \neq t_2 \ .$$

Posons $S = t_1 + t_2$ et $P = t_1 \cdot t_2$. (pour somme et produit).

Après avoir effectué les calculs et simplifié par $(t_2 - t_1) \neq 0$, il vient :

$$\begin{cases} 2P - S + 5 = 0 \\ P + S - 2 = 0 \end{cases}$$

Ce qui donne $P = -1$ et $S = 3$

t_2 et t_1 sont alors les solutions de l'équation : $X^2 - SX + P = 0$.

C'est-à-dire : $X^2 - 3X - 1 = 0$.

Il s'en suit que : $t_1 = \dfrac{3 - \sqrt{13}}{2}$ et $t_2 = \dfrac{3 + \sqrt{13}}{2}$.

Et le point $A\ (x(t_1), y(t_1)) = \left(1, \dfrac{1}{3}\right)$ est un point double .

Deuxième méthode :

Pour que A : (u,v) soit un point double il faut et il suffit que les deux trinômes :

$P(X) = u \cdot (X^2 - X - 2) - (2X - 1)$ et $Q(X) = v \cdot (X^2 + 2) - (X + 1)$.

aient deux racines communes. Cela se traduit par la proportionalité de leurs coefficients.

C'est à dire : $\dfrac{u}{v} = \dfrac{-u-2}{-1} = \dfrac{-2u+1}{2v-1}$. Cela donne : $\begin{cases} u = uv + 2v \\ 2uv + 4v + u = 3 \end{cases}$

On en tire que $u = 1$ et $v = \dfrac{1}{3}$.

Par conséquent : $A : \left(1, \dfrac{1}{3}\right)$ est un point double de Γ . ■

10.2 Même exercice avec $x(t) = \dfrac{t-1}{t^2+2}$ et $y(t) = \dfrac{t^2 + t - 3}{t^2 - 3t + 1}$.

Solution

La première méthode, utilisée dans l'exercice précédent, aboutit à une absurdité :
$S - P = 2$ et $S - P = -2$.
Ce qui pourrait laisser croire qu'il n'existe pas de point double.
Deuxième méthode : Soit A(u,v) un point double éventuel.
Les coefficients des deux trinômes :
$P(X) = u(X^2 + 2) - (X - 1)$
et $Q(X) = v(X^2 - 3X + 1) - (X^2 + X - 3)$
sont proportionnels. Et par suite, on a :

$$\frac{u}{v-1} = \frac{-1}{-3v-1} = \frac{2u+1}{v+3} \quad \text{ce qui donne} \quad \begin{cases} v - 1 = 3uv + u \\ v + 3 = 2(3uv + u) + 3v + 1 \end{cases}.$$

D'où $v = 1$ et $u = 0$
Ainsi le point A (0,1) est un point double de Γ.

__Remarque__ :
La première méthode ne peut aboutir que si le point double correspond à des paramètres t_1 et t_2 de valeurs finies. Alors que la seconde méthode permet de trouver les points doubles, même quand l'une des valeurs des paramètres est infinie
Dans notre cas : A : (0,1) correspond à $t_1 = 1$ et $t_2 = \pm\infty$. ■

10.3

Etudier la nature des points $M(t_o)$ dans les cas suivants :
1°) $\begin{cases} x(t) = t - 1 \\ y(t) = t^2 + 1 \end{cases}$ et $t_o = \frac{1}{4}$. 2°) $\begin{cases} x(t) = t^3 + 3t^2 + 3t \\ y(t) = t^2 \end{cases}$ et $t_o \in \{-1, 0\}$.

Solution

Dans tous les cas, on va chercher le plus petit entier naturel p tel que $F^{(p)}(t_o) \neq 0$ où $F(t) = (x(t), y(t))$ et le plus petit entier $q > p$ tel que $(F^{(p)}(t_o), F^{(q)}(t_o))$ soit une base de $\mathbb{R}^2$.

1) On a $\begin{cases} x'\left(\frac{1}{4}\right) = 1 \\ y'\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{2} \end{cases}$ et $\begin{matrix} x''\left(\frac{1}{4}\right) = 0 \\ y''\left(\frac{1}{4}\right) = 2 \end{matrix}$

donc $\left(F'\left(\frac{1}{4}\right) ; F''\left(\frac{1}{4}\right)\right)$ est bien une base de $\mathbb{R}^2$.

le point $M\left(\frac{1}{4}\right)$ est alors un point de concavité.

2) En calculant les dérivées successives de x et y et en vérifiant au fur et à mesure on trouve :

$\begin{cases} x'(0) = 3 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$ $\begin{matrix} x''(0) = 6 \\ y''(0) = 2 \end{matrix}$ le point M (0) est alors un point de concavité.

Pour le point M(-1) on a :

$\begin{cases} x'(-1) = 0 \\ y'(-1) = -2 \end{cases}$ $\begin{cases} x''(-1) = 0 \\ y''(-1) = 2 \end{cases}$

On voit que (F'(-1) , F''(-1)) est un système lié, mais F'''(-1) = (6,0) donc (F'(-1) , F'''(-1)) est une base de $\mathbb{R}^2$.
D'où M(-1) est un point d'inflexion . ■

10.4 1) Etudier la nature des points M (t_0) dans les cas suivants :

1°) $\begin{cases} x(t) = t^2 + 2t \\ y(t) = \dfrac{1}{t^2} - 2t \end{cases}$ $t_0 = -1$ 2°) $\begin{cases} x(t) = t^2 - t^5 \\ y(t) = t^4 \end{cases}$ $t_0 = 0$

3°) $\begin{cases} x(t) = \sin^2 t \\ y(t) = 1 - \cos t \end{cases}$ $t_0 = 0$

Solution

1) $\begin{cases} x'(t) = 2t + 2 \\ y'(t) = \dfrac{-2}{t^3} - 2 \end{cases}$ donc $\begin{cases} x'(-1) = 0 \\ y'(-1) = 0 \end{cases}$

$\begin{cases} x''(t) = 2 \\ y''(t) = \dfrac{6}{t^4} \end{cases}$ $\begin{cases} x'''(t) = 0 \\ y'''(t) = \dfrac{-24}{t^4} \end{cases}$

donc F''(- 1) = (2 , 6) et F'''(- 1) = (0,- 24)
det (F'' (- 1) , F''' (- 1)) $\neq$ 0 donc p = 2, q = 3
le point M (- 1) est un point de rebroussement de 1ére espèce.

2) F' (0) = (0, 0) donc le point (0 , 0) est un point stationnaire de plus
F'' (0) = (2, 0) et F'''(0) = (0,0) mais $F^{(4)}(0)$ = (0,24)
on voit bien que (F''(0), $F^{(4)}(0)$) est une base de $\mathbb{R}^2$
donc le point M(0) est un point de rebroussment de 2éme espèce.

3) On a x'(0) = y' (0,0) = 0
F''(0) = (2,1) , F'''(0) = (0,0) et $F^{(4)}(0)$ = (- 8,- 1)
donc p = 2 , q = 4 le point M(0) est un point de rebroussement de 2éme espèce. ■

10.5 1) Etudier l'existence des points d'inflexion de la courbe Γ parametrée par la fonction vectorielle F definie par :

1) $\begin{cases} x(t) = \dfrac{1}{t^2} \\ y(t) = t + \dfrac{3}{t} \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x(t) = 2\,\mathrm{Log}\,|t| - t \\ y(t) = t^2 + 5t \end{cases}$

Solution

On cherchera les valeurs du paramètre t pour lesquelles (F'(t) , F''(t)) est un système lié et (F'(t) , F''(t)) est libre on est donc amené à calculer les dérivées premières, secondes et troisième si nécessaire dans les quatre cas.

1) x est paire, y étant impaire donc Γ est symétrique par rapport à ox il vient alors que si $M(t_o)$ est un point d'inflexion alors $M(-t_o)$ l'est aussi.

On resteindra la recherche pour $t \in]0 ; +\infty[$.

(F'(t) , F''(t)) est lié si et seulement si det (F'(t),F''(t)) = 0 .

Ce qui est équivalent à : $\frac{-6}{t^4} + \frac{6}{t^6} = 0$.

Ou encore $(1 - t^2) = 0$ ce qui donne la valeur $t_1 = 1$.

mais F'''(1) = (- 24 , - 18)

On a bien (F'(1), F'''(1)) libre donc le point M(1) = (1,4) est un point d'inflexion et pour la raison citée plus haut. M(-1) = M(-1,4) est aussi un point d'inflexion.

2) on a det (F' (t) , F'' (t)) = $\frac{-2}{t^2}(t^2 - 4t - 5)$.

Les deux vecteurs F'(t) et F''(t) sont liés si et seulement si $t^2 - 4t - 5 = 0$.

Donc il existe deux valeurs t_1 et t_2 pour lesquelles les points correspondants peuvent être des points d'inflexion.

$t_1 = 5$ et $t_2 = -1$.

et comme (F'(-1), F'''(-1)) est libre le point A (-1) est un point d'inflexion .

De même (F'(5), F'''(5)) est libre, donc le point A (5) est un point d'inflexion. ■

10.6 Même exercice avec

1) $\begin{cases} x(t) = t^2 + 2t \\ y(t) = \frac{1}{t^2} - 2t \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x(t) = 2\cos t - \frac{1}{2}\cos 2t \\ y(t) = \sin t \end{cases}$

Solution

1) det (F'(t),F''(t)) = 0 $\Leftrightarrow 4t^4 + 4t + 3 = 0$.

une étude sommaire de la fonction $j(t) = 4t^4 + 4t + 3$.

montre que $4t^4 + 4t + 3 > 0$.

Donc la courbe Γ ne possède pas de points d'inflexion.

2) x et y sont périodique de période 2π, on réduit le domaine d'étude à $[-\pi, \pi]$.

De plus x est paire et y impaire, Γ présente alors une symétrie par rapport à ox.

On restreint la recherche à l'intervalle $[0,\pi]$.

On a det (F'(t), F''(t)) = 0 $\Leftrightarrow 1 - \cos^3 t = 0$.

donc la valeur pour laquelle on peut avoir un point d'inflexion est $t_o = 0$.

Mais F'''(0) = (0,-1) et F'(0) = (0,1) les deux vecteurs sont liés.

Or $F^{(4)}(0)$ = ('- 6,0)

Le point M(0) ne peut-être un point d'inflexion car $(F'(0), F^{(4)}(0))$ est libre.

10.7 Etudier les branches infinies de la courbe définie par :

$$x(t) = \frac{(t+2)^2}{t+1} \qquad \text{et} \quad y(t) = \frac{(t-2)^2}{t-1}.$$

on précisera la position de la courbe par rapport aux asymptotes

Solution :

1) La fonction vectorielle F(t) = (x (t) , y (t)) est définie sur $\mathbb{R} - \{-1, 1\}$.
En changeant t en - t on a :

$$\begin{cases} x(-t) = -y(t) \\ y(-t) = -x(t) \end{cases}$$

on alórs une symétrie par rapport à la deuxième bissectrice (y = - x)
Il suffit alors de faire l'étude sur $[o, 1[\cup]1 ; +\infty[$.

<u>Etude au voisinage de t = 1</u> :

On a $\lim\limits_{t\to 1} x(t) = \frac{9}{2}$. et $\lim\limits_{t\to 1^+} y(t) = +\infty$, $\lim\limits_{t\to 1^-} y(t) = -\infty$.

Donc la droite d'équation $x = \frac{9}{2}$ est une asymptote verticale à la courbe (quand t tend vers 1).

<u>Etude au voisinage de + ∞</u> :

$\lim\limits_{t\to +\infty} x(t) = \lim\limits_{t\to +\infty} y(t) = +\infty$. La courbe présente une branche infinie

Comme $\lim\limits_{t\to+\infty} \frac{y(t)}{x(t)} = \lim\limits_{t\to+\infty} \frac{(t-2)^2}{(t+2)^2} \cdot \frac{t+1}{t-1} = 1$.

et $\lim\limits_{t\to+\infty} y(t) - x(t) = \lim\limits_{t\to+\infty} \frac{-6t^2+8}{(t^2-1)} = -6$.

D'où la droite d'équation $y = x - 6$ est une asymptote à la courbe .

D'autre part $\lim\limits_{t\to+\infty} [y(t) - (x(t) - 6)] = \lim\limits_{t\to+\infty} \frac{2}{(t^2-1)} = 0^+$.

Donc la courbe est située au dessus de l'asymptote. ■

10.8 Etudier les branches infinies de la courbe définie par :

$$x(t) = \frac{2at^2}{1+t^3} \quad \text{et} \quad y(t) = \frac{2at^3}{1+t^2}, \quad a \in \mathbb{R}^*$$

Solution

Le domaine de définition est $D = D_x \cap D_y = \mathbb{R} - \{-1\}$.

puisque $\lim\limits_{t\to -1} x(t) = \infty$ et $\lim\limits_{t\to -1} y(t) = -a$.

donc la droite d'équation $y = -a$ est une asymptote horizontale à la courbe quand tend vers - 1 .

Etude au voisinage de l'infini

$$\lim_{t \to +\infty} x(t) = o^+ (\text{ou } o^-) \text{ et } \lim_{t \to +\infty} y(t) = (\text{signe de } a)(+\infty) .$$

$$\lim_{t \to -\infty} x(t) = o^- (\text{ou } o^+) \text{ et } \lim_{t \to -\infty} y(t) = (\text{signe de } a)(-\infty) .$$

Donc la droite d'équation $x = 0$ est une asymptote verticale à la courbe (quand t tend vers l'infini) ■

10.9 Soit la courbe Γ paramètrée par la fonction F de composantes

$$\begin{cases} x(t) = \text{Log}\,|t+1| + \text{Log}\,|t| \\ y(t) = \text{Log}\,|t+1| - \text{Log}\,|t| . \end{cases}$$

a) Déterminer le domaine de définition de F et montrer que Γ est symétrique par rapport à l'axe ox.

b) Etudier les branches infinies de Γ .

c) Tracer Γ dans un repère orthonormée $(o, \vec{i}, \vec{j})$

Solution

a) Le domaine de définition de F est : $D_F = D_x \cap D_y = \mathbb{R} - \{o, -1\}$.

Montrons Γ que est symétrique par rapport à ox.

Γ est symétrique par rapport à l'axe $y = a$ si et seulement si

$\forall t \in D_F \quad \exists t_1 \in D_F : y(t_1) = 2a - y(t)$ et $x(t_1) = x(t)$.

or $\forall t \in D_F \quad \exists t_1 = -t-1$ tel que : $x(-t-1) = x(t)$ et $y(-t-1) = -y(t)$.

donc Γ est symétrique par raport à l'axe $y = 0$.

donc on restreint l'étude à l'intervalle $[-\frac{1}{2}, o[\cup]o, +\infty[$.

b) On a $\lim_{t \to 0} x(t) = -\infty$ et $\lim_{t \to 0} y(t) = +\infty$.

La courbe Γ admet une branche infinie quand t tend vers 0

$$\lim_{t \to 0} \frac{y(t)}{x(t)} = \lim_{t \to 0} \frac{\text{Log}\,|t+1| - \text{Log}\,|t|}{\text{Log}\,|t+1| + \text{Log}\,|t|} .$$

La règle de l'Hospital nous donne : $\lim_{t \to} \frac{y(t)}{x(t)} = -1$.

Donc la droite $y = -x$ est une direction asymptotique .

Mais comme $\lim_{t \to 0} y(t) + x(t) = \lim_{t \to 0} 2\,\text{Log}\,|t+1| = 0$.

La droite d'équation $y = -x$ est une asymptote à la courbe.

Etude du voisinage de l'infini

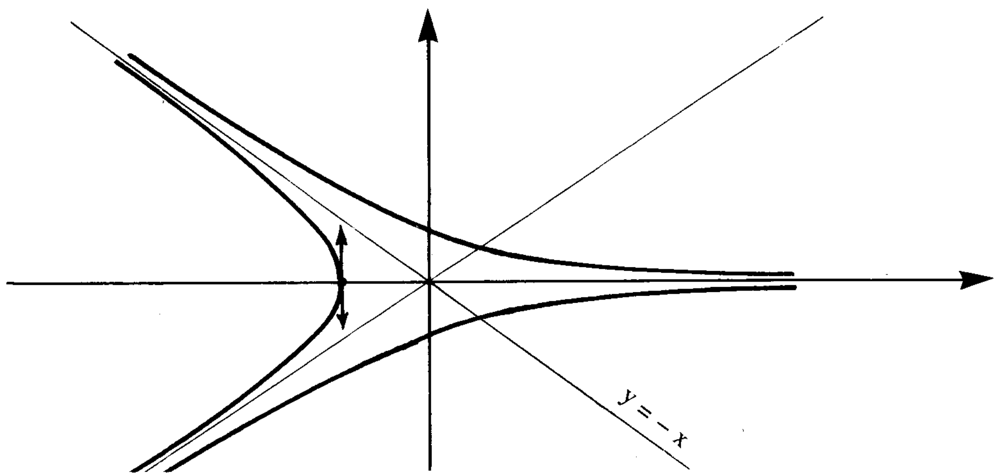
$\lim\limits_{t \to +\infty} x(t) = +\infty$ et $\lim\limits_{t \to +\infty} y(t) = 0$

La droite de l'équation $y = 0$ est une asymptote à la courbe.

c) Sens de variation et graphe.

$$x'(t) = \frac{2t+1}{t(t+1)} \quad \text{et} \quad y'(t) = \frac{-1}{t(t+1)}.$$

t	$-\frac{1}{2}$		0		1		$+\infty$
$x'(t)$	0		‖	$+$		$+$	
$x(t)$	$-2\,\mathrm{Log}\,2$	↘	$-\infty$ ‖ $-\infty$	↗	$\mathrm{Log}\,2$	↗	$+\infty$
$y(t)$	0	↗	$+\infty$ ‖ $+\infty$	↘	$\mathrm{Log}\,2$	↘	0
$y'(t)$	4	$+$	‖		$-$		



10.10

1) On considère la courbe plane Γ paramètrée par :

$$\begin{cases} x(t) = t + \mathrm{Log}\,|1-t| \\ y(t) = \sqrt{1-t^2} \end{cases}$$

a) déterminer le domaine de définition de la fonction vectorielle F de composantes x (t), y (t) .

b) Etudier le sens de variation des fonctions x et y (on précisera les branches infinies de Γ) .

c) Etudier la nature du point (o,1) et tracer la courbe Γ .

Solution

a) F est définie sur $D_x \cap D_y = [-1, 1[$.

b) Les variations de x et y sont résumées dans le tableau suivant :

t	-1		0		1
$x'(t)$		$+$	0	$-$	
$x(t)$	$-1+\log 2$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\infty$
$y(t)$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0
$y'(t)$		$+$	0	$-$	

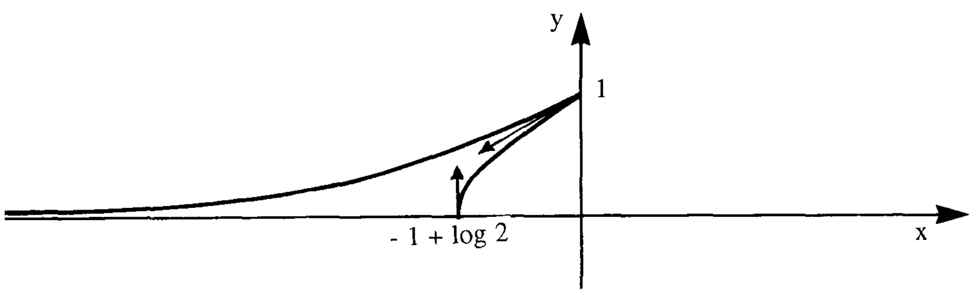
$x'(t) = \frac{-t}{1-t}$

$y'(t) = \frac{-t}{\sqrt{1-t^2}}$

La droite d'équation y = 0 est asymptote à la courbe

(car $\lim_{t \to 1} x(t) = +\infty$ et $\lim_{t \to 1} y(t) = 0$) .

c) Puisque x'(0) = y'(0) = 0 le point (0,1) est un point stationnaire .
Mais $F''(0) = (-1\,;-1)$ et $F'''(0) = (-2, 0)$ Ce qui montre que (0,1) est un point de rebroussement de $1^{\text{ére}}$ espèce.



10.11

> 6) soit la courbe parametrée par F(t) = (x (t), y (t)) où
> $$x(t) = t^2 + \operatorname{Log}|t| \ , \quad y(t) = \frac{1}{t} + t.$$
> a) Déterminer D_F et montrer que Γ est symetrique par rapport à l'axe Ox .
> b) Etudier les branches infinies de Γ .
> c) Montrer Γ que admet deux points d'inflexions;
> d) Tracer la courbe Γ .

Solution

a) $D_F = \mathbb{R}^*$.

La fonction x étant paire et y impaire donc Γ est symétrique par rapport à l'axe Ox.
On réduit alors l'intervalle d'étude à $]0\,;+\infty[$.

b) $\lim\limits_{t \to 0^+} x(t) = -\infty$, $\lim\limits_{t \to 0^+} y(t) = +\infty$.

donc Γ admet une branche infinie quand t tend vers 0

Et puisque $\lim\limits_{t \to +\infty} x(t) = +\infty$ et $\lim\limits_{t \to +\infty} y(t) = +\infty$.

Γ admet une branche infinie quand t tend vers $+\infty$

Or $\lim\limits_{t \to 0^+} \dfrac{y(t)}{x(t)} = \lim\limits_{t \to 0} \dfrac{1 + t^2}{+t^3 + t \operatorname{Log}|t|} = +\infty$.

Γ admet alors une branche parabolique de direction Oy .

et Comme $\lim\limits_{t \to +\infty} \dfrac{y(t)}{x(t)} = \lim\limits_{t \to +\infty} \dfrac{1 + t^2}{t^3 \left(1 + \dfrac{\operatorname{Log} t}{t^2}\right)} = 0$.

La courbe Γ possède une branche parabolique de direction Ox .

c) Les points d'inflexions se trouvent parmi les points $M(t_0)$ tels que :

$(F'(to) , F''(to))$ est lié .

Or $\det(F'(t_0) , F''(t_0)) = 0 \Leftrightarrow 2t^4 - 7t^2 - 1 = 0$.

Ce qui donne les deux valeurs:

$$t_0 = \sqrt{\frac{7 + \sqrt{57}}{4}} \quad \text{et} \quad t_1 = -\sqrt{\frac{7 + \sqrt{57}}{4}} .$$

De plus : $(F''(t) , F'''(t))$ est lié $\Leftrightarrow t = \pm\sqrt{\dfrac{1}{6}}$.

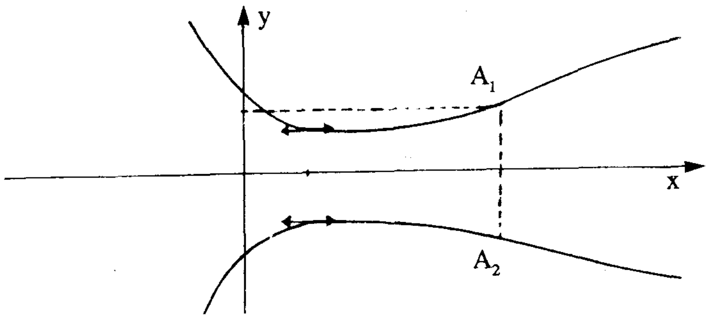
D'où $(F''(t_0) , F'''(t_0))$ et$(F''(t_1) , F'''(t_1))$ sont deux systèmes libres ce qui confirme que les points $A_1 (t_0)$ et $A_2 (t_1)$ sont deux points d'inflexions de Γ .

d) Les variations de x et y sont resumées dans le tableau suivant :

t	0		1		$+\infty$
$x'(t)$		$+$	3	$+$	
$x(t)$	$-\infty$	$\nearrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$
$y(t)$	$+\infty$	$\searrow$	2	$\nearrow$	$+\infty$
$y'(t)$		$-$	0	$+$	

$$x'(t) = \frac{2t^2 + 1}{t}$$

$$y'(t) = \frac{t^2 - 1}{t^2}$$



10.12 Soit la courbe plane parametrée par la fonction vectorielle F de composantes :

$$x(t) = 2t^3 - \frac{15}{2}t^2 + 9t - \frac{7}{2} \quad \text{et} \quad y(t) = 2t + \frac{1}{t^2}.$$

a) Déterminer le domaine de définition de F et étudier les branches infinies .
b) Etudier le sens de variations des fonctions x et y.
c) Etudier la nature du point A : (o, 3) et tracer Γ .

Solution :

a) $D_F = \mathbb{R}^*$

$\lim\limits_{|t| \to +\infty} x(t) + \infty$

$\lim\limits_{|t| \to +\infty} y(t) = +\infty$

donc : comme $\lim\limits_{|t| \to +\infty} \frac{y(t)}{x(t)} = 0$ la courbe Γ admet une branche parabolique de direction Ox .

$\lim\limits_{t \to 0} y(t) \ y(t) = +\infty$ et $\lim\limits_{t \to 0} x(t) = -\frac{7}{2}$.

la droite d'équation $x = -\frac{7}{2}$ est une asymptote à Γ .

b) on a $x'(t) = 6t^2 - 15t + 9$ et $y'(t) = 2 - \frac{2}{t^3}$. et le tableau de variations :

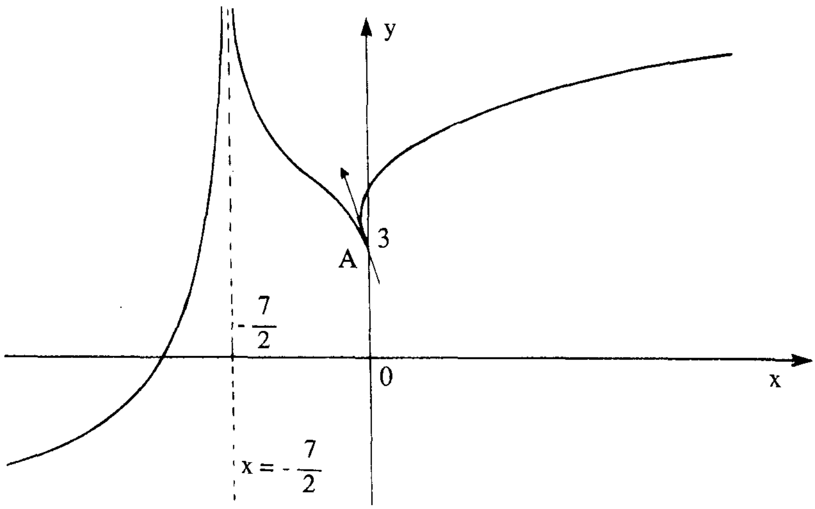
	$-\infty$		0		1		3/2		$+\infty$
x' (t)			+		0	−	0	+	
x (t)	$-\infty$	↗	$-7/2$	↗	0	↘	$-1/8$	↗	$+\infty$
y (t)	$-\infty$	↗	$+\infty$ ‖ $+\infty$	↘	3	↗	31/9	↗	$+\infty$
y' (t)		+	‖	−	0	+		+	

c) le point (0,3) est un point stationnaire ($x'(1) = y'(1) = 0$) .
Or $(x''(1) , y''(1)) = (- 3, 6)$ et $(x'''(1) , y'''(1)) = (12 , - 24)$
Le vecteur $F'''(1)$ est égal à $- 4 F''(1)$ donc les deux vecteurs sont liés.

Or $x^{(4)}(t) = 0$, $y^{(4)}(t) = \dfrac{120}{t^6}$.

Donc $(F''(1) , F^{(4)}(1)$ est une base de $\mathbb{R}^2$

Ce qui entraine que le point A (1) = (0 , 3) est un point de rebroussement de 2ème espèce.



10.13

> Etudier et tracer la courbe parametrée par la fonction F définie par :
> $x(t) = ch^3 t$, $y(t) = sh^3 t$.

Solution

$D_F = \mathbb{R}$.

x étant paire , y impaire le domaine d'étude se réduit alors à $\mathbb{R}^{+}$ et on complète la courbe par rapport à Ox .

<u>Limites et branches infinies</u>

$\lim\limits_{t \to +\infty} x(t) = +\infty$ et $\lim\limits_{t \to +\infty} y(t) = +\infty$.

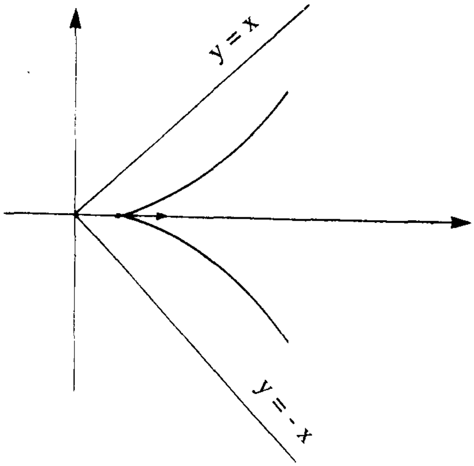
Or $\lim\limits_{t \to +\infty} \dfrac{y(t)}{x(t)} = \lim\limits_{t \to +\infty} th^3 t = 1$.

et comme $\lim\limits_{t \to +\infty} [y(t) - x(t)] = \lim\limits_{t \to +\infty} \dfrac{-3 e^t - e^{-3t}}{4} = -\infty$.

donc la courbe Γ admet une branche parabolique de direction la droite y = x

<u>Sens de variation</u> :

	0	$+\infty$
$x'(t)$	0	+
$x(t)$	1	$\nearrow$ $+\infty$
$y(t)$	0	$\nearrow$ $+\infty$
$y'(t)$	0	+



Le point (1, o) est un point stationnaire : comme F" (0) = (0,6) et F'''(0) = (0, 3) Les deux vecteurs sont libres donc le point (1, 0) est un point de rebroussement de $1^{\text{ère}}$ espèce . ■

10.14 9) Construire la courbe plane : $x(t) = t + \dfrac{1}{t}$, $y(t) = \dfrac{4}{t} - \dfrac{2}{t^2}$.

(on précisera la nature du point (2 , 2).)

Solution :

Le domaine de définition est $D_F = \mathbb{R}$.

<u>Limites et branches infinies</u>.

$\lim\limits_{|t| \to +\infty} x(t) = \pm\infty$, $\lim\limits_{|t| \to +\infty} y(t) = 0 \Rightarrow$ La droite y = 0 est une asymptote à la courbe quand t tend vers ∞.

$$\left.\begin{array}{ll} \lim\limits_{t \to +\infty} x(t) = +\infty \; ; & \lim\limits_{t \to 0^+} y(t) = -\infty \\ \lim\limits_{t \to 0^-} x(t) = -\infty \; ; & \lim\limits_{t \to 0^-} y(t) = -\infty \end{array}\right\}$$

on a alors une branche infinie quand t tend vers o.

Mais $\lim\limits_{t \to 0^-} \dfrac{y(t)}{x(t)} = +\infty$ et $\lim\limits_{t \to 0^+} \dfrac{y(t)}{x(t)} = -\infty$.

Donc la coube admet une branche parabolique de direction Oy .

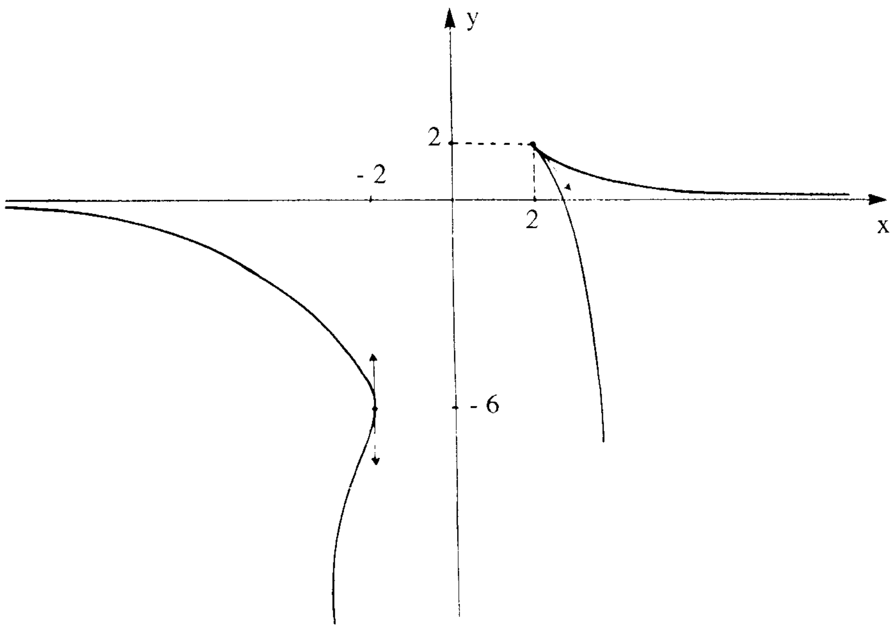
<u>Sens de variation .</u>

On a $x'(t) = 1 - \dfrac{1}{t^2}$ et $y'(t) = \dfrac{-4}{t^2} + \dfrac{4}{t^3}$.

Le point A (2, 2) est un point singulier , étudions alors sa nature
on a (x"(1), y"(1) = (2, - 4) et (x'''(1) , (y'''(1) = (- 6 ; 24)
Le système (F"(1) , F'''(1)) est libre donc le point A est un point de rebroussement de $1^{\text{ère}}$ espèce .

Les variations de x et y sont alors resumées dans le tableau suivant :

t	$-\infty$		-1		0	0		1		$+\infty$
$x'(t)$		$+$		$-$			$-$		$+$	
$x(t)$	$-\infty$	$\nearrow$	-2	$\searrow$	$-\infty$	$+\infty$	$\searrow$	2	$\nearrow$	$+\infty$
$y(t)$	0	$\searrow$	-6	$\searrow$	$-\infty$	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	0
$y'(t)$		$-$		$-$			$+$		$-$	



10. 15

> 10) Construire la courbe plane : $x(t) = 2 \operatorname{Arctg}(t)$; $y(t) = \operatorname{Log} \dfrac{1+t^2}{1-t^2}$.

Solution :

Le domaine de définition est l'intervalle]-1 , 1 [. La fonction x est impaire , y est paire, donc la coube est symétrique par rapport à Oy , il suffit de faire l'etude sur [0,1 [.

$\lim\limits_{t \to 1^-} y(t) = +\infty$ et $\lim\limits_{t \to 1^-} x(t) = \dfrac{\pi}{2}$

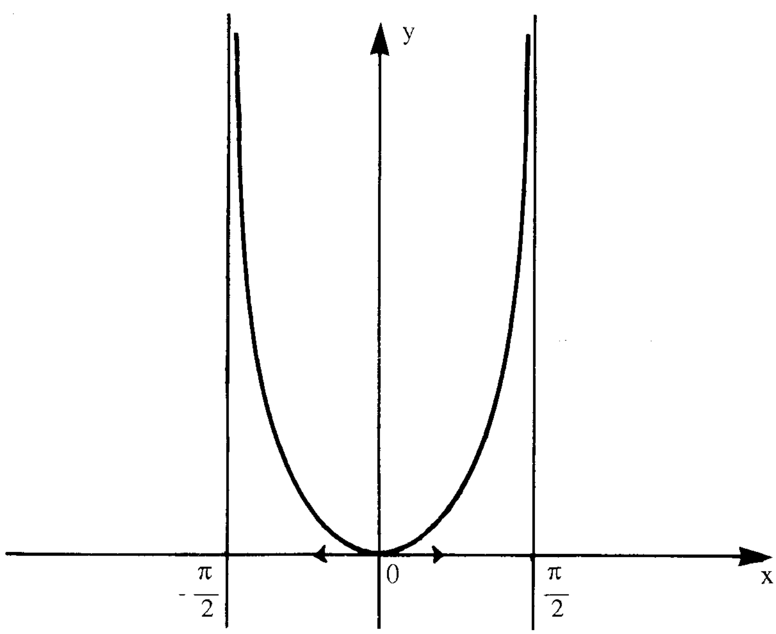
Donc la droite d'équation $x = \dfrac{\pi}{2}$ est une asymplote à la courbe .

Les variations de x et y sont données par le tableau ci-dessous :

	0		1
x' (t)	2	+	
x (t)	0	↗	$\frac{\pi}{2}$
y(t)	0	↗	$+\infty$
y' (t)	0	+	

$$x'(t) = \frac{2}{1+t^2}\,.$$

$$y'(t) = \frac{4t}{(1+t^2)(1-t^2)}$$



COURBES EN POLAIRE

11.1

1) Donnez en coordonnées polaires, l'équation d'une droite D connaissant son équation cartésienne $y = ax + b$
2) Ecrire, en coordonnées polaires, l'équation d'un cercle $\mathscr{C}$ passant par le pôle.

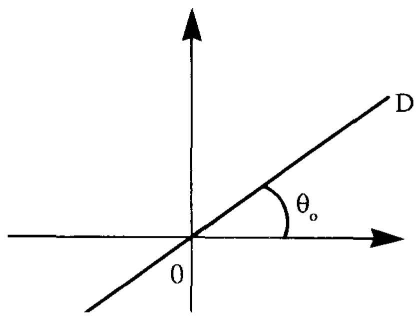
Solution

1) Dans un premier cas, si $b = 0$, la droite D passe par l'origine. Son équation, exprimée en coordonnées polaires , s'écrit : $\boxed{\theta = \theta_o}$

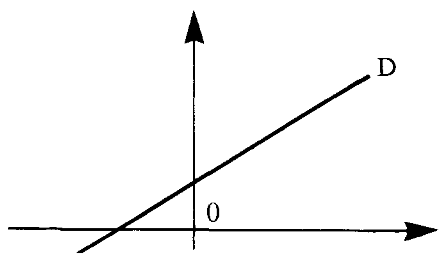
En effet : l'équation $y = ax$ s'ecrit:

$\rho \sin \theta = a \rho \cos \theta$ et entraine :

$\operatorname{tg} \theta = a$ d'où θ est constante.



Supposons maintenant que $b \neq 0$.
$y = ax + b$, entraine
$\rho \sin \theta - a \rho \cos \theta = b$.
Ce qui donne: $\rho = \dfrac{b}{\sin \theta - a \cos \theta}$.
Ce qui a bien un sens puisque $b \neq 0$, donc ρ et l'expression au dénominateur ne peuvent être nuls.



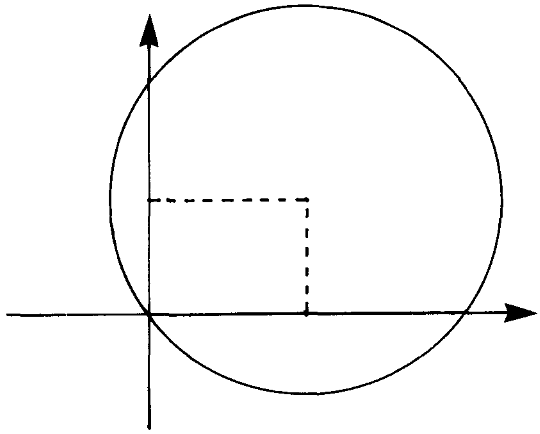
Plus généralement, il est facile de voir que l'équation :

$$\rho = \frac{1}{A \cos \theta + B \sin \theta}$$

est bien l'équation d'une droite dont l'équation cartésienne est :

$$Ax + By = 1$$

2) L'équation cartésienne d'un cercle passant par le pôle est :
$x^2 + y^2 - 2\,ax - 2\,by = 0$ où (a , b) représente les coordonnées du centre I du cercle.



En remplaçant x et y par $\rho \cos \theta$ et $\rho \sin \theta$ respectivement
Cela donne :
$\rho^2 - 2\,a\,\rho \cos \theta - 2\,b\,\rho \sin \theta = 0$.
Si $\rho \neq 0$. L'équation devient :
$\rho = 2\,a \cos \theta + 2\,b \sin \theta$.
Cette équation représente tout le cercle, y compris le pôle pour la valeur de θ telle que : $2\,a \cos \theta + 2\,b \sin \theta = 0$.
Plus généralement : l'équation $\rho = A \cos \theta + B \sin \theta$. représente le cercle passant par l'origine O et de centre $I = \left(\dfrac{A}{2}, \dfrac{B}{2}\right)$.

Remarque

Pour un cercle de centre O et de rayon R, il est facile de voir que son équation polaire est $\rho = R$. ■

11.2 Chercher les équations cartésiennes des courbes d'équations polaires suivantes :

1°) $\rho = a\dfrac{\cos\theta - \sin\theta}{\sin\theta\cos\theta}$ où $a \neq 0$.

2°) $\rho = \dfrac{4}{2 - \cos\theta}$ 3°) $\rho = a \,.\, \mathrm{tg}\dfrac{\theta}{2}$.

Solution

1) Multiplions les deux membres de l'équation par ρ. Il vient :

$$\rho^2 \sin\theta\cos\theta = a(\rho\cos\theta - \rho\sin\theta) .$$

Ce qui donne $xy = a(x - y)$ ou encore $y(x + a) = ax$

La substitution $x = -a$ dans cette équation entraîne que $a = 0$. Ce qui est contraire à notre hypothèse.

D'où cette équation s'écrit : $y = \dfrac{ax}{x + a}$.

2) Cette équation peut s'écrire $2\rho = \rho\cos\theta + 4$.

En élevant au carré les deux membres, cela donne : $4(x^2 + y^2) = (x + 4)^2$

Après simplifications on a : $3x^2 + 4y^2 - 8x - 16 = 0$, qui n'est autre que l'équation d'une ellipse.

3) En posant $t = \mathrm{tg}\dfrac{\theta}{2}$ on sait que $\sin\theta = \dfrac{2t}{1 + t^2}$.

En multipliant les deux membres de cette équation par ρ et en remplaçant t par $\dfrac{\rho}{a}$ il vient :

$$y = \frac{2a\rho^2}{a^2 + \rho^2}$$

Ce qui donne $2a(x^2 + y^2) = y(a^2 + x^2 + y^2)$. ■

qui est une équation cartésienne implicite.

11.3 Soit Γ_a la courbe d'équation polaire $\rho_a(\theta) = a + 2\cos\theta$.

1) Déterminer la nature de l'origine pour Γ_2

2) Démontrer que l'origine est un point double pour Γ_1

3) Tracer Γ_1 , Γ_2 , Γ_3 et Γ_6

Solution

Pour toute valeur de a , ρ_a est définie sur $\mathbb{R}$, périodique de période 2π, on étudiera alors ρ sur $[-\pi, \pi]$.

1) La nature de l'origine est donnée par la parité du plus petit naturel p vérifiant

$\rho_a^{(p)}(\theta_o) = 0$ où θ_o est solution de l'équation $\rho_a(\theta_o) = 0$.

Si p est impair, l'origine est un point de concavité sinon c'est un point de rebroussement de $1^{\text{ère}}$ espèce et se sont les seuls cas.

On a $\rho_2(\theta) = 0 \Leftrightarrow \theta_o = -\pi$ ou $\theta_1 = \pi$.

et $\rho'_2(\theta) = -2\sin\theta$ donc $\rho(\theta_o) = \rho(\theta_1) = 0$.

de plus $\rho''_2(\theta) = -2\cos\theta$ et $\rho''_2(\theta_1) = 2 \neq 0$.

D'où le point O est un point de rebroussement de 1ère espèce.

2) Γ_1 a pour équation $\rho_1(\theta) = 1 + 2\cos\theta$. L'équation $\rho_1(\theta) = 0$ a pour solution $\theta_o = \dfrac{2\pi}{3}$ et $\theta_1 = -\dfrac{2\pi}{3}$. e plus $\rho'_1(\theta_o) \neq 0$ et $\rho'_1(\theta_1) \neq 0$,

donc l'origine est un point double .

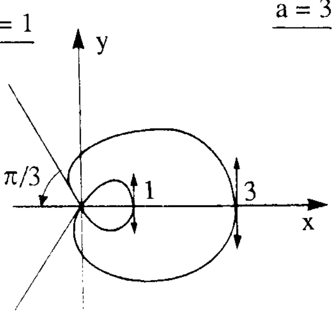
3) On pourra réduire l'intervalle d'étude à $I = [0, \pi]$ (car ρ est paire) et compléter l'arc obtenu par symétrie par rapport à Ox . $\rho'_a(\theta) = -2\sin\theta$.

La tangente à la courbe fait un angle α avec $u(\theta_o)$ vérifiant : $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\rho_a(\theta_o)}{\rho'_a(\theta_o)}$

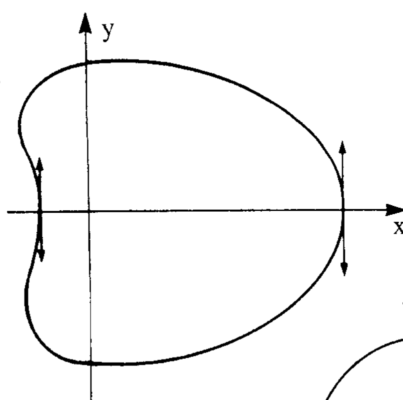
au point $M(\theta_o) \neq 0$, si $\rho'_a(\theta_o) \neq 0$ sinon elle est portée par $u'(\theta_o)$. Si $M(\theta_o) = 0$ la tangente est portée par $u(\theta_o)$. On obtient alors les courbes ci-dessous.

	0	π/2		2π/3	π
ρ' (θ)	0	-2	−	$-\sqrt{3}$	0
ρ (θ)	a + 2	a		a - 1	a - 2

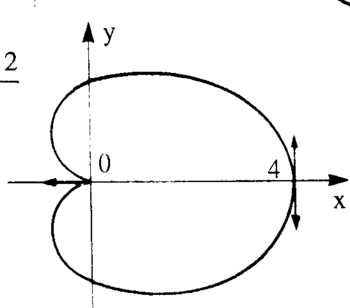
a = 1



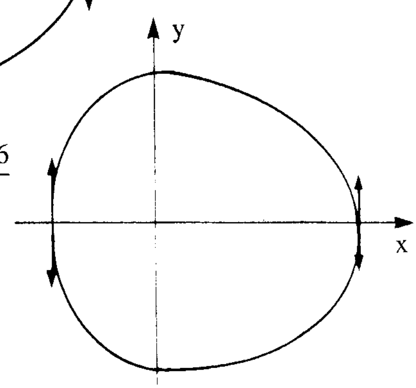
a = 3



a = 2



a = 6



11.4 On considère la courbe Γ_a d'équation en coordonnées polaires

$$\rho_a(\theta) = a + \frac{2}{\cos\theta} \quad , a > 0.$$

1) Démontrer que l'origine est un point de rebroussement de 1ère espèce pour Γ_2

2) Démontrer que l'origine est un point double pour Γ_3

3) Tracer Γ_a pour $a = 1$, $a = 2$, $a = 3$

Solution

ρ_a est définie sur $\mathbb{R} - \{(2k+1)\pi/2\}$ et elle périodique de période 2π il suffit alors

de l'étudier sur $[-\pi , \frac{-\pi}{2}[\cup]\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\cup]\frac{\pi}{2}, \pi]$

$$\rho'_a(\theta) = \frac{2\sin\theta}{\cos^2\theta} \quad \forall \ a > 0.$$

1) Cherchons les valeurs de θ telles que $\rho_2(\theta) = 0$.

$\rho_2(\theta) = 0$ admet pour solution $\theta_o = -\pi$ et $\theta_1 = \pi$.

De plus $\rho'_a(\theta_i) = 0$ et $\rho''_a(\theta_i) \neq 0$. $i = 0, 1$.

Ce qui prouve que l'origine est un point de rebroussement de 1 ère espèce.

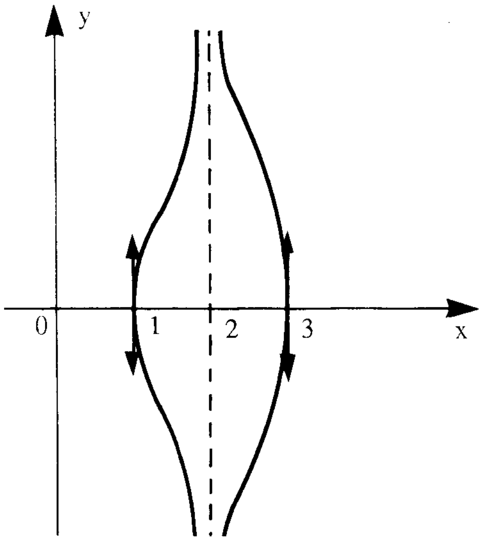
2) Même démonstration qu'en (11.3 2°/) .

3) ρ_a est paire, on restreint l'étude à $[0 , \frac{\pi}{2}[\cup]\frac{\pi}{2}, \pi]$. et on complète par symétrie par rapport à ox

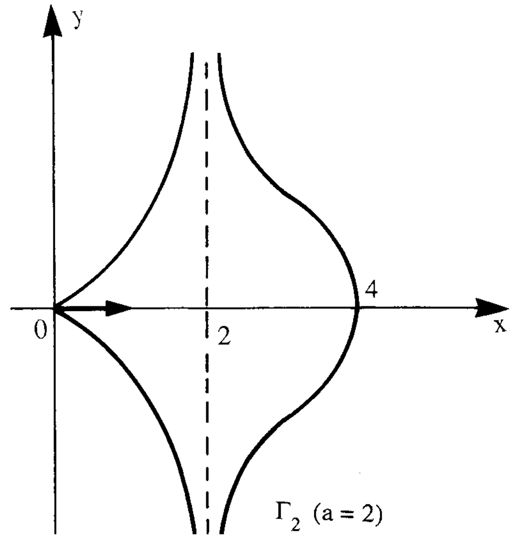
$$\lim_{\theta \to \frac{\pi}{2}} \rho_a(\theta) = \pm\infty \qquad \text{et} \qquad \lim_{\theta \to \frac{\pi}{2}} \rho_a(\theta) . \sin(\theta - \frac{\pi}{2}) = -2$$

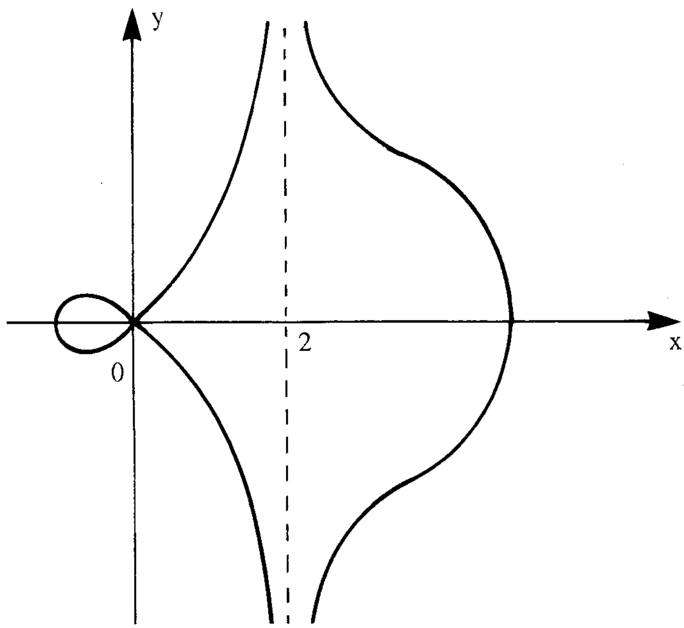
Ce qui prouve que la droite d'équation $Y = -2$, dans le repère faisant un angle $\theta_o = \frac{\pi}{2}$ avec le repère oxy est une asymptote à Γ_a .

	o		$\pi/2$		π
$\rho'(\theta)$	o	+	||	+	o
$\rho(\theta)$	$a+2$	↗	$+\infty$ || $-\infty$	↗	$a-2$



Γ_1 (a = 1)





11.5 Etudier les branches infinies de la courbes Γ, d'équation polaire

$$\rho(\theta) = \frac{2\theta}{1-\theta}.$$

Solution : ρ est définie sur $\mathbb{R} - \{1\}$.

Pour étudier les branches infinies de la courbe Γ, nous étudions les limites aux bornes du domaine de définition de f. On a :

$\lim\limits_{\theta \to +\infty} \rho(\theta) = -2$ et $\lim\limits_{\theta \to -\infty} \rho(\theta) = -2$.

Donc le cercle de centre o et de rayon 2 est un cercle asymptote à Γ.

et comme $\lim\limits_{\theta \to -\infty} |\rho(\theta)| - 2 = 0^+$, la spirale s'enroule autour du cercle en restant exterieur.

et $\lim\limits_{\theta \to +\infty} |\rho(\theta)| - 2 = 0^-$, la spirale tend vers le cercle dans le sens des aiguilles d'une montre en restant à l'intérieur.

$$\lim_{\substack{\theta \to 1 \\ \theta > 1}} \rho(\theta) = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{\substack{\theta \to 1 \\ \theta > 1}} \rho(\theta) = -\infty .$$

On étudie alors $\lim\limits_{\theta \to 1} \rho(\theta) . \sin(\theta - 1)$:

mais $\rho(\theta) . \sin(\theta - 1) = \dfrac{2\theta}{1 - \theta} \sin(\theta - 1)$.

donc $\lim\limits_{\theta \to 1} \rho(\theta) \sin(\theta - 1) = -2$.

On conclut alors que la droite $Y = -2$, dans le repère faisant un angle $\theta_0 = 1$ avec Oxy, est une asymptote à la courbe.

■

11.6 Etudier les branches infinies de la courbe Γ, d'équation polaire :

$$\rho(\theta) = \frac{\theta^2}{\pi - \theta} .$$

Solution

$\lim\limits_{\theta \to +\infty} \rho(\theta) = -\infty$, $\lim\limits_{\theta \to -\infty} \rho(\theta) = +\infty$.

On a alors une branche spirale qui s'agrandit avec $\|\overrightarrow{OM}(\theta)\|$.

$$\lim_{\theta \to \pi^+} \rho(\theta) = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{\theta \to \pi^-} \rho(\theta) = -\infty .$$

On étudie donc $\lim\limits_{\theta \to \pi} \rho(\theta) \sin(\theta - \pi)$:

Mais $\lim\limits_{\theta \to \pi} \rho(\theta) \sin(\theta - \pi) = \lim\limits_{\theta \to \pi} -\theta^2 . \dfrac{\sin(\theta - \pi)}{\theta - \pi} = -\pi^2$.

La droite d'équation $Y = -\pi^2$ est une asymptote à la courbe.

■

11.7 Etudier les branches infinies de la courbe Γ, d'équation polaire :

$$\rho(\theta) = \frac{2 \cos\theta}{2\cos\theta - 1} .$$

Solution

ρ est définie sur $\mathbb{R} - \left\{\dfrac{\pi}{3} + 2k\pi , -\dfrac{\pi}{3} + 2k\pi\right\}$.

ρ est périodique de période 2π, il suffit de l'étudier sur le domaine :

$[-\pi, -\frac{\pi}{3}[\cup]-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}[\cup]\frac{\pi}{3}, \pi]$.

ρ est paire, on restreint l'étude à l'intervalle $I = [0\ \frac{\pi}{3}[\cup]\frac{\pi}{3}, \pi\ ]$.
et on complète par symétrie par rapport à l'axe Ox.

$$\lim_{\theta \to \frac{\pi}{3}} \rho(\theta) = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{\theta \to \frac{\pi}{3}} \rho(\theta) = : \sin\left(\theta - \frac{\pi}{13}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

En effet : $\rho(\theta)\ \sin\left(\theta - \frac{\pi}{3}\right) = \dfrac{2\cos\theta \,.\, \sin\left(\theta - \frac{\pi}{3}\right)}{2\cos\theta - 1}$.

On pose $u = \theta - \frac{\pi}{3}$ et on fait un developpement limité au voisinage de 0.

$$\text{Donc}\quad \rho\left(u + \frac{\pi}{3}\right) \sin u = \frac{1 - \sqrt{3}\,u - \frac{u^2}{2} + O(u^2)}{-\sqrt{3} - \frac{u}{2} + O(u^2)}$$

$$\text{D'où}\quad \lim_{\theta \to \frac{\pi}{3}} \rho(\theta) \sin\left(\theta - \frac{\pi}{3}\right) = \lim_{u \to 0} \rho\left(u + \frac{\pi}{3}\right) \sin u = -\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

et par conséquent la droite d'équation $Y = \frac{-\sqrt{3}}{2}$ dans le repère déduit par une rotation d'angle $\frac{\pi}{3}$ par rapport au repère oxy est une asymptote à la courbe. ■

11.8 Etudier les branches infinies de la courbe Γ, d'équation polaire :

$$\rho(\theta) = \frac{e^{2\theta} + 2}{e^{2\theta} - 2}.$$

Solution

$D_\rho = \mathbb{R} - \{\text{Log}\sqrt{2}\}$, $\lim_{\theta \to +\infty} \rho(\theta) = 1$

Le cercle de centre O et de rayon 1 est un cercle asymptote à la courbe.
La courbe s'enroule autour du cercle en restant à l'exterieur .
$\lim_{\theta \to -\infty} \rho(\theta) = -1$. encore le cercle $\mathscr{C}(O, 1)$ est asymptote à la courbe qui s'approche du cercle en étant intérieure à celui-ci. Et finalement :

$$\lim_{\theta \to (\text{Log}\sqrt{2})^+} \rho(\theta) = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{\theta \to (\text{Log}\sqrt{2})^-} \rho(\theta) = -\infty.$$

Etudions alors $\lim_{\theta \to \frac{1}{2}\text{Log}\,2} \rho(\theta)\ \sin(\theta - \text{Log}\sqrt{2})$.

on a $\rho(\theta) \cdot \sin(\theta - \text{Log}\sqrt{2}) = (e^{2\theta} + 2) \cdot \dfrac{\theta - \text{Log}\sqrt{2}}{e^{2\theta} - 2} \cdot \dfrac{\sin(\theta - \text{Log}\sqrt{2})}{\theta - \text{Log}\sqrt{2}}$.

$\lim\limits_{\theta \to \text{Log}\sqrt{2}} e^{2\theta} + 2 = 4$ et $\lim\limits_{\theta \to \text{Log}\sqrt{2}} \dfrac{\sin(\theta - \text{Log}\sqrt{2})}{\theta - \text{Log}\sqrt{2}} = 1$.

et par application de la règle de l'Hôspital on a :

$$\lim_{\theta \to \text{Log}\sqrt{2}} \frac{\theta - \text{Log}\sqrt{2}}{e^{2\theta} - 2} = \lim_{\theta \to \text{Log}\sqrt{2}} \frac{1}{2e^{2\theta}} = \frac{1}{4} .$$

D'où : $\lim\limits_{\theta \to \text{Log}\sqrt{2}} \rho(\theta)\sin(\theta - \text{Log}\sqrt{2}) = 1$.

Ce qui montre que la courbe possède la droite $Y = 1$ comme asymptote. ■

11.9 Déterminer les points d'inflexion de la courbe Γ d'équation

$$\rho(\theta) = \frac{1}{\cos\theta - \cos 2\theta} .$$

Solution :

Les points d'inflexions correspondent aux valeurs de θ telles que :

$$\varphi(\theta) = \left[\frac{1}{\rho(\theta)} + \left(\frac{1}{\rho(\theta)}\right)''\right]$$ s'annule en changement de signe.

On a $\varphi(\theta) = 3\cos 2\theta$.

(en tenant compte des symétries (périodicité, parité)) on ne cherche que les points d'inflexions correspondant aux valeurs de $\theta \in [0, \pi]$.

$$\begin{pmatrix} \varphi(\theta) = 0 \\ \theta \in [0, \pi] \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left(\theta = \frac{\pi}{4} , \theta = \frac{5\pi}{4}\right)$$

Γ possède alors quatre points d'inflexions : les points trouvés ci -dessus et leurs symétriques par rappport à l'axe Ox . ■

11.10 Determiner les points d'inflexion de la courbe Γ, d'équation :

$$\rho(\theta) = 3 + 2\cos\theta .$$

Solution :

On résoud encore l'équation $\varphi(\theta) = 0$ où cette fois $\varphi(\theta) = 17 + 18\cos\theta$.

Ce qui donne $17 + 18\cos\theta = 0$.

donc on obtient un point d'inflexion qui correspond à la valeur θ_o, telle que $\cos\theta_o = -\dfrac{17}{18}$ et son symétrique par rapport à l'axe Ox.

■

11.11 Soit Γ la courbe paramétrée en coordonnées polaires par : $\rho(\theta) = 1 + \operatorname{tg}\frac{\theta}{2}$

1) Déterminer le domaine de définition de ρ et étudier les branches infinies.
2) Déterminer les points doubles de Γ.
3) Déterminer les tangentes aux points doubles.

Solution :

1) ρ est définie sur $\mathbb{R} - \{(2k+1)\pi / k \in \mathbb{Z}\}$.

ρ est périodique, de période 2π, il suffit de faire une étude sur l'intertvalle $]-\pi, \pi[$

<u>Branches infinies</u>

$\lim\limits_{\theta \to -\pi_+} \rho(\theta) = -\infty$ et $\lim\limits_{\theta \to -\pi_+} \rho(\theta)\sin(\theta+\pi) = \lim\limits_{\theta \to -\pi_+} \sin\theta + 2\sin^2\frac{\theta}{2} = -2$.

donc la droite d'équation $Y = -2$ est une asymptote à la courbe.

$\lim\limits_{\theta \to \pi_-} \rho(\theta) = +\infty$ et $\lim\limits_{\theta \to \pi_-} \rho(\theta)\sin(\theta - \pi) = -2$.

donc la droite d'équation $Y = -2$ est une asymptote à la courbe.

2) Les points doubles de Γ correspondent aux valeurs de θ solutions des équations :

(1) $\rho(\theta + 2k\pi) = \rho(\theta)$

ou où $k \in \mathbb{Z}^*$

(2) $\rho(\theta + 2(k+1)\pi) = -\rho(\theta)$

or ρ est périodique de poériode 2π donc l'équation (1) n'a pas de solutions.

Résolvons alors l'équation (2)

on a : $\rho(\theta + (2k+1)\pi) = -\rho(\theta) \Rightarrow \sin(\theta + (2k+1)\frac{\pi}{2}) = \cos(\theta + (2k+1)\frac{\pi}{2})$.

Ce qui donne deux solutions dans $]-\pi, \pi[$ pour $k = -1$.

$\theta = \frac{\pi}{4}$ et $\theta = \frac{3\pi}{4}$ avec $\rho(\frac{\pi}{4}) = \rho(\frac{3\pi}{4})$.

La courbe Γ admet alors un seul point double $M : \left(\frac{\pi}{4}\right)$

3) on a $\begin{cases} \rho'(\theta) = \frac{1}{2}\left(1 + \operatorname{tg}^2\frac{\theta}{2}\right) \\ \rho(\theta) = 1 + \operatorname{tg}\frac{\theta}{2} \end{cases}$

On constate que $\rho'\left(\frac{\pi}{4}\right) \neq 0$ et $\rho'\left(\frac{3\pi}{4}\right) \neq 0$. donc pour détérminer

les tangentes à Γ au point double, on calcule $\operatorname{tg} v = \frac{\rho(\theta_o)}{\rho'(\theta_o)} = 2\frac{\left(1 + \operatorname{tg}\frac{\theta}{2}\right)}{\left(1 + \operatorname{tg}^2\frac{\theta}{2}\right)}$.

Or l'équation (2) pour k = - 1 devient $tg^2 \frac{\theta}{2} + 2\, tg \frac{\theta}{2} - 1 = 0$ .Ce qui donne

$$tg\, v = \frac{1 + tg \frac{\theta}{2}}{1 - tg \frac{\theta}{2}} \quad \text{donc} \quad tg\, v = \frac{tg \frac{\pi}{4} + tg \frac{\pi}{4} \,.\, tg \frac{\theta}{2}}{tg \frac{\pi}{4} - tg \frac{\pi}{4} \,.\, tg \frac{\theta}{2}} = tg\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2}\right).$$

$\theta = \frac{\pi}{4} \Rightarrow v = \frac{3\pi}{8}$ et $\theta = \frac{3\pi}{4}$, $v = \frac{5\pi}{8}$. Ce qui détermine parfaitement les tangentes. ■

11.12 Construire les courbes Γ d'équation polaire :

a) $\rho\ (\theta) = \cos 2\theta$ b) $\rho\ (\theta) = \cos 3\theta$

Solution :

a) le domaine de définition de ρ est $D = \mathbb{R}$.

ρ est périodique de période π, on réduit alors l'intervalle d'étude à $I = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ et on complète l'arc obtenu par une rotation de centre O et d'angle π.

ρ est paire, on restreint l'étude à $[o, \pi/2]$ et on complète par symétrie par rapport à l'axe Ox.

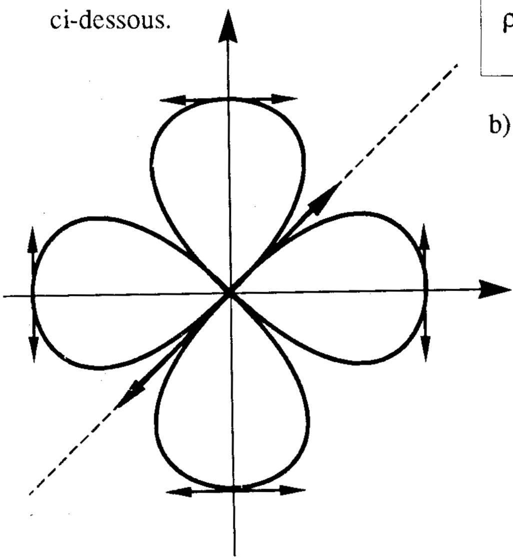
$\rho'\ (\theta) = -2 \sin 2\theta$.

Le pôle est un point de concavité car

$$\rho\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0 \quad \text{et} \quad \rho'\left(\frac{\pi}{4}\right) \neq 0 .$$

On obtient la représentation graphique ci-dessous.

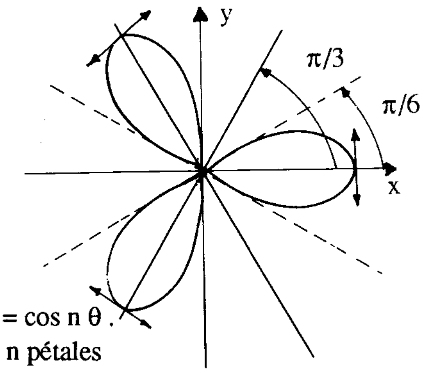
	0		π/4		π/2
ρ' (θ)	0	-	- 2	-	0
ρ(θ)	1	↘	0	↘	- 1



b) Même étude qu'en a) ; on donne brièvement les étapes essentielles.

$D = \mathbb{R}$; intervalle d'étude $I = \left[o, \frac{\pi}{3}\right]$

	0		$\pi/6$		$\pi/3$
$\rho'(\theta)$	0	-	-3	-	0
$\rho(\theta)$	1 ↘		0	↘	-1



<u>Remarque</u> : On peut généraliser ce résultat : $\rho(\theta) = \cos n\theta$.
Si n est pair : la courbe obtenue est une fleur à 2 n pétales
Si n est impair : la courbe est une fleur à n pétales. ■

11.13

> Construire la courbe Γ d'équation polaire
> a) $\rho(\theta) = e^{\theta}$ b) $\rho(\theta) = 2 + \text{th}\,\theta$.

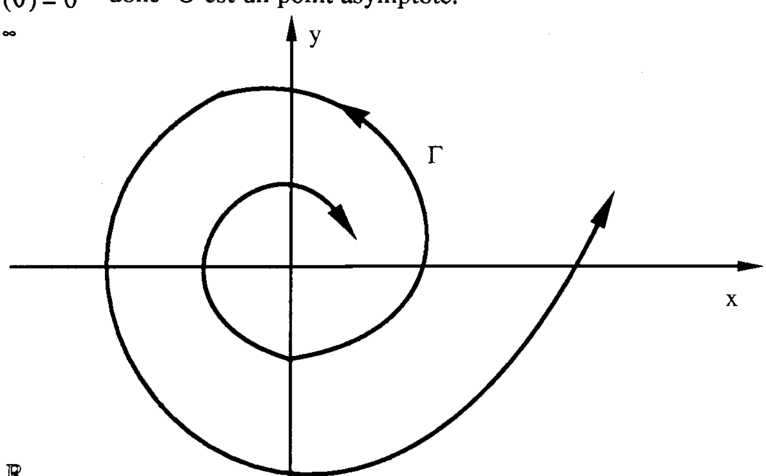
Solution :

a) ρ est définie sur $\mathbb{R}$

	$-\infty$		0		$+\infty$
$\rho'(\theta)$		+	1	+	
$\rho(\theta)$	0	↗	1	↗	$+\infty$

$\lim_{\theta \to +\infty} \rho(\theta) = +\infty$ On a alors une branche spirale qui s'agrandit en s'eloignant de O .

$\lim_{\theta \to -\infty} \rho(\theta) = 0$ donc O est un point asymptote.

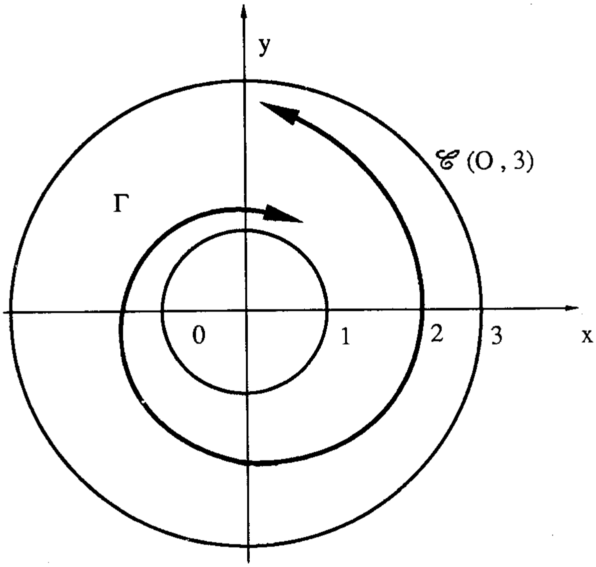


b) D = $\mathbb{R}$

$\lim_{\theta \to +\infty} \rho(\theta) = 3$ donc le cercle de centre O et de rayon 3 est un cercle asymptote à Γ

$\lim_{\theta \to -\infty} \rho(\theta) = 1$ le cercle de centre O et de rayon 1 est un cercle asymptote à Γ .

	$-\infty$	0	$+\infty$
$\rho'(\theta)$		1	
$\rho(\theta)$	1	$\nearrow$ 2 $\nearrow$	3



11.14 Construire la courbe Γ d'équation polaire : $\rho(\theta) = \dfrac{e^{-\theta}}{1-\theta}$

Solution

$D = \mathbb{R} - \{ 1 \}$

$\lim\limits_{\theta \to +\infty} \rho(\theta) = 0$ donc le pôle est un point asymptote à Γ .

$\lim\limits_{\theta \to -\infty} \rho(\theta) = +\infty$ on a une branche spirale

$\lim\limits_{\theta \to 1} \rho(\theta) = \pm\infty$ et $\lim\limits_{\theta \to 1} \rho(\theta) \sin(\theta - 1) = -\dfrac{1}{e}$

donc la droite d'équation $Y = -\dfrac{1}{e}$ dans le repère faisant un angle $\alpha = 1$ avec le repère Oxy est une asymptote à la courbe

$$\rho'(\theta) = \frac{\theta e^{-\theta}}{(1-\theta)^2}.$$

	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$\rho'(\theta)$	$-$		$+$ ||	$+$
$\rho(\theta)$	$+\infty$ $\searrow$	1	$\nearrow$ $+\infty$ || $-\infty$	$\nearrow$ 0

<u>Points multiples</u>

Les points multiples sont solutions des équations

(1) $\rho(\theta + 2k\pi) = \rho(\theta)$

ou $k \in \mathbb{Z}^*$

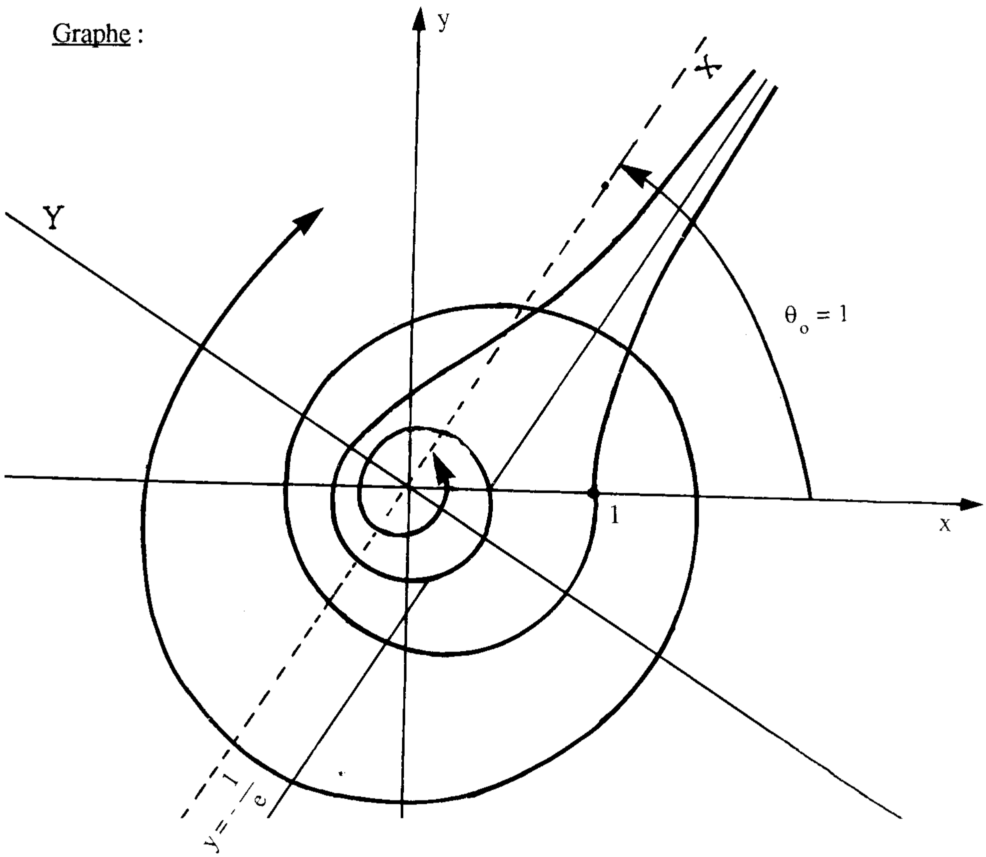
(2) $\rho(\theta + (2k+1)\pi) = -\rho(\theta)$

Ce qui donne une infinité de valeurs de θ .

$$\theta_k = \frac{1 - 2k\pi - e^{-2k\pi}}{1 - e^{-2k\pi}} \quad \text{ou} \quad \theta_k = \frac{e^{-(2k+1)\pi} - (2k+1)\pi + 1}{1 + e^{-(2k+1)\pi}} .$$

Donc Γ admet une infinité de points multiples.

Graphe :



11.15 Etudier et représenter graphiquement les courbes d'équations polaires :

a) $\rho(\theta) = \sqrt{2}\cos^2\theta + 2\sin^2\theta$.

b) $\rho(\theta) = \sqrt{3}\cos^3\theta + 3\sin^3\theta$.

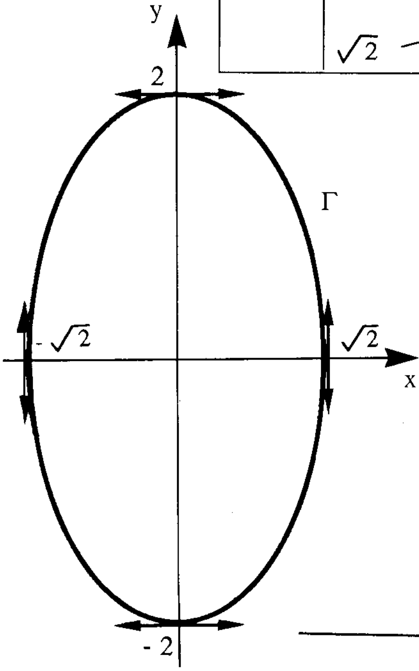
Solution :

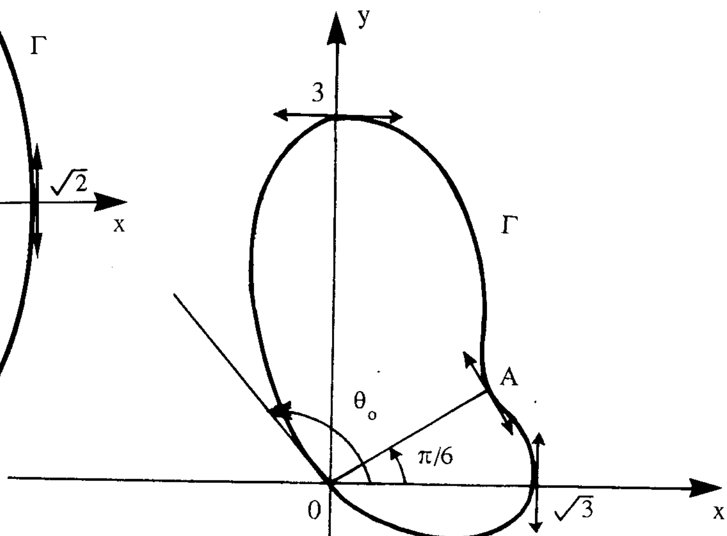
a) $D = \mathbb{R}$. On a $\rho(\theta + \pi) = \rho(\theta)$ donc ρ est périodique de période π, il suffit de faire l'étude sur $\left[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ et compléter l'arc obtenu par rotation de centre O et d'angle π .

ρ est en plus paire donc on restreint l'étude sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ et on complète la courbe par symétrie par rapport à l'axe Ox.

$\rho'(\theta) = 2(2 - \sqrt{2})\cos\theta\sin\theta$.

	0		$\pi/2$
$\rho(\theta)$		+	
$\rho(\theta)$	$\sqrt{2}$	$\nearrow$	2





b) $D = \mathbb{R}$

ρ est périodique 2π et $\rho(\theta + \pi) = -\rho(\theta)$

donc il suffit d'étudier ρ sur $[o,\pi]$.

$\rho'(\theta) = 3\cos\theta\sin\theta\,(3\sin\theta - \sqrt{3}\cos\theta)$.

	0		$\pi/6$		$\pi/2$		θ_o		π
$\rho(\theta)$	0	$-$	0	+	0	$-$		$-$	0
$\rho(\theta)$	$\sqrt{3}$	$\searrow$	$\frac{3}{2}$	$\nearrow$	3	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\sqrt{3}$

L'éxistence de la valeur de θ_o est assurée par le théorème des valeurs intérmediaires ■

EQUATIONS DIFFERENTIELLES

12.1 Soit l'équation différentielle : (E) $\qquad 2\,x\,y' + y = \dfrac{1}{1 - x}$.

1) Intégrer (E) sur chacun des intervalles $I_1 =]-\infty, 0[$, $I_2 =]0, 1[$ $I_3 =]1, +\infty[$.

2) Est-il possible de trouver une solution de (E) sur $]-\infty, 1[$.

Solution

1) (E) est une équation différentielle linéaire du 1er ordre.

Résolution de l'équation sans **second membre :**

$$\text{(E')} \qquad 2\,x\,y' + y = 0$$

Les solutions y qui ne s'annulent pas sur $\mathbb{R}^*$ sont aussi solutions de

$\dfrac{y'}{y} = -\dfrac{1}{2\,x}$. que l'on peut écrire $\dfrac{dy}{y} = \dfrac{-dx}{2\,x}$

on obtient par intégration $\quad \text{Log}\,\dfrac{y}{C} = -\dfrac{1}{2}\,\text{Log}\,|x|$.

où C est une constante du même signe que y.

Finalement $\qquad y = \dfrac{C}{\sqrt{|x|}}$

Résolution de l'équation complète :

on applique la méthode de la variation de la constante

on pose $\;y = C(x)\;y_1\;$ avec $\;y_1 = \dfrac{1}{\sqrt{|x|}}$. $\qquad$ (E) s'écrit alors :

$$2\,x\,[\,C'(x)\,y_1 + C(x)\,y'_1\,] + C(x)\,y_1 = \frac{1}{1 - x^2}.$$

$$2\,x\,C'(x)\,y_1 + C(x)\,[2\,x\,y'_1 + y_1\,] = \frac{1}{1 - x}.$$

Et puisque y_1 est solution de (E') on obtient

$$2\,x\,C'(x)\;y_1 = \frac{1}{1 - x}. \qquad \text{soit } C'(x) = \frac{\sqrt{|x|}}{2\,x\,(1 - x)}.$$

a - Résolution sur $I_1 =]-\infty, 0[$:

On obtient $\quad C'(x) = \dfrac{-1}{2\sqrt{-x}\,(1 - x)}$, puisque $\quad -x = \sqrt{-x}\,\sqrt{-x}$

Par suite : $C(x) = \displaystyle\int \frac{-dx}{2\sqrt{-x}(1-x)}$, posons $t = \sqrt{-x}$

$$C(x) = \int \frac{dt}{1+t^2} = \text{Arctg}\, t + C_1 . \qquad C(x) = \text{Arctg}\sqrt{-x} + C_1 .$$

Par conséquent :

$$y(x) = \frac{\text{Arctg}\sqrt{-x} + C_1}{\sqrt{-x}} . \qquad (1)$$

b - Résolution sur $I_2 =]\, 0\,,\, 1\,[$.

$$C'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}(1-x)} .$$

Par suite : $C(x) = \displaystyle\int \frac{dx}{2\sqrt{x}(1-x)}$. En posant $t = \sqrt{x}$, cela donne :

$$C(x) = \int \frac{dt}{1-t^2} = \text{Argth}\, t + C_2 \qquad \text{car sur} \quad]-1\,,\,1\,[\ (\text{Argth}\, t)' = \frac{1}{1-t^2} .$$

Finalement

$$y = \frac{\text{Argth}\sqrt{x} + C_2}{\sqrt{x}} .$$

c - Résolution sur $I_3 =]\, 1\,,\, +\infty\,[$.

On obtient par le changement de variable $t = \sqrt{x}$

$$C(x) = \int \frac{dt}{1-t^2}$$

et puisque sur $]-\infty\,,\,-1\,[\ \cup\ ]\,1\,,\,+\infty\,[$ $\quad (\text{Argcoth}\, t)' = \dfrac{1}{1-t^2}$.

on a : $\quad C(x) = \text{Argcoth}\, t + C_3$

Ainsi

$$y = \frac{\text{Argcoth}\sqrt{x} + C_3}{\sqrt{x}} \qquad (2)$$

2- Soit f la fonction définie sur I_1 et I_2 respectivement par les formules (1) et (2) .

f admet une limite finie en 0 si $C_1 = C_2 = 0$.

Cette limite est alors égale à 1. Posons $f(0) = 1$

La fonction f est alors continue sur $]-\infty\,,\,1\,[$. Montrons qu'elle est dérivable sur cet intervalle. Il sufit de montrer la dérivabilité en 0.

Posons $t = \sqrt{|x|}$

si $\quad x \in I_1 \qquad f(x) = \dfrac{\text{Arctg}\, t}{t} = 1 - \dfrac{t^2}{3} + o(t^2)$.

si $\quad x \in I_2 \qquad f(x) = \dfrac{\text{Arg th}\, t}{t} = 1 + \dfrac{t^2}{3} + o(t^2)$.

Ainsi pour $x \in\ ]-\infty\,,\,+1\,[\quad f(x) = 1 + \dfrac{x}{3} + o(x)$.

f étant continue en 0 et admet un DL d'ordre 0 au voisinage de 0, elle est donc dérivable en 0 et f'(0) = 1/3 ■

12.2 Intégrer l'équation differentielle : $y' - 2xy = e^{x^2} \sin x$.

Solution

Résolvons d'abord l'équation sans second membre

$y' - 2xy = 0$ donc $\frac{dy}{y} = 2x\,dx$ d'où $\text{Log}\,\frac{y}{C} = x^2$ et par suite $y = C\,e^{x^2}$

Cherchons la solution de l'équation complète sous la forme :

$$y = C(x)\,y_1 \quad \text{avec} \quad y_1 = e^{x^2}$$

En substituant dans l'équation (E) on obtient :

$C'(x)\,y_1 = e^{x^2} \sin x$. Puis , après simplifications : $C'(x) = \sin x$

Ce qui donne : $C(x) = -\cos x + K$

Finalement $y = (K - \cos x)\,e^{x^2}$. ■

12.3 Intégrer l'équation diffentielle :

(E) $y' - (2x - 1)\,y = e^{x^2}$

Solution

Equation sans second membre :

$y' - (2x - 1)\,y = 0$ donc $\frac{dy}{y} = (2x - 1)\,dx$ et par suite $\text{Log}\,\frac{y}{C} = x^2$

$$y = C\,e^{x^2 - x}$$

Equation complète par la méthode de Variation de la constante :

Posons $y = C(x)\,y_1$ avec $y_1 = e^{x^2 - x}$

(E) devient : $C'(x)\,y_1 = e^{x^2}$. Puis, après simplifications : $C'(x) = e^{x}$

Par suite : $C(x) = e^{x} + K$

Finalement : $y = e^{x^2} + k\,e^{x^2 - x}$. ■

12.4 déterminer la solution de l'équation

(E) $y' + y \,\text{cotg}\, x = e^{\cos x}$

sur l'intervalle] 0,π [telle que $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$

Solution

Equation sans second membre :

(E') $y' + y \operatorname{cotg} x = 0$ donc $\frac{dy}{y} = -\operatorname{cotg} x \, dx$ d'où $\operatorname{Log} \frac{y}{C} = -\operatorname{Log} \sin x$

Par suite : $y = \frac{C}{\sin x}$.

Equation complète par la mèthode de variation de la contante :

Posons $y = C(x)\, y_1$ avec $y_1 = \frac{1}{\sin x}$.

(E) devient : $C'(x)\, y_1 + C(x)\, [y'_1 + y_1 \operatorname{cotg} x] = e^{\cos x}$.

Par suite : $C'(x) = \sin x \;\; e^{\cos x}$.

Cela donne : $C(x) = -e^{\cos x} + K$

D'où $y = \frac{K - e^{\cos x}}{\sin x}$.

la condition $y(\frac{\pi}{2}) = 0$ nous donne $K = 1$

Finalement $y = \frac{1 - e^{\cos x}}{\sin x}$. ■

12.5 Résoudre l'équation différentielle :

(E) $x y' = e^{-xy} - y$

Solution

L'équation peut s'écrire : $xy' + y = e^{-xy}$ donc $(xy)' = e^{-xy}$

Posons $z = xy$ on obtient : $z' = e^{-z}$

Après substitution, cela donne : $e^{-z} dz = dx$

Par suite $e^{z} = x + C$

D'où $z = \operatorname{Log}(x + C)$

La solution sur un intervalle I tel que $0 \notin I$ et $I \subset \,]-C, +\infty[$. est donnée par

$$y = \frac{\operatorname{Log}(x + C)}{x}.$$ ■

12.6 Intégrer l'équation différentielle suivante

$$y' + 2xy + xy^4 = 0$$

Solution

C'est une équation de Bernoulli. On se ramène à une équation linéaire en divisant par y^4

$$\frac{y'}{y^4} + \frac{2x}{y^3} + x = 0$$

Posons $Z = \frac{1}{y^3}$ $Z' = \frac{-3y'}{y^4}$ on obtient : (E) $-\frac{Z'}{3} + 2xZ = -x$

Résolution de l'équation sans second membre : $-\frac{Z'}{3} + 2\,x\,Z = 0$

On peut écrire $\frac{dZ}{Z} = 6\,x\,dx$.

Ce qui donne : $\text{Log}\,\frac{Z}{C} = 3\,x^2$ et $Z = C\,e^{3\,x^2}$

Résolution de (E) : posons $Z = C\,(x)\,Z$, avec $Z_1 = e^{3\,x^2}$
L'équation (E) devient :

$$-\frac{1}{3}C'\,(x)\;Z_1 = -\,x \qquad \text{ou encore} \qquad C'\,(x) = 3\,x\,e^{-3\,x^2}$$

Par suite $C\,(x) = -\frac{1}{2}\,e^{-3\,x^2} + K$.

Ainsi $Z\,(x) = K\,e^{3\,x^2} - \frac{1}{2}$.

Finalement $y = \dfrac{1}{\sqrt[3]{K\,e^{3\,x^2} - \frac{1}{2}}}$. ■

12.7 Résourdre l'équation différentielle

$$y' + y = y^2 \sin x\ .$$

Solution

C'est une équation de Bernoulli. Divisons par y^2, il vient :

$$\frac{y'}{y^2} + \frac{1}{y} = \sin x$$

Posons $Z = \frac{1}{y}$ donc $Z' = \frac{-\,y'}{y^2}$ et on obtient : $-\,Z' + Z = \sin x$.

L'équation $-\,Z' + Z = 0$ admet pour solution $Z = C\,e^x$
Considérons maintenant c comme une fonction de x . (E) devient :

$$-\,C'\,e^x - C\,e^x + C\,e^x = \sin x\ .$$

$$C = -\int \sin x\,e^{-x}\,dx.$$

On obtient par une double intégration par parties

$$C = \frac{\sin x + \cos x}{2}\,e^{-x} + K$$

Finalement $Z = \frac{\sin x + \cos x}{2} + K\,e^{-x}$ et $y = \frac{1}{Z}$. ■

12.8 Déterminer la solution de l'équation différentielle .

$$\text{(E)} \qquad \frac{y - x\,y'}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 1$$

définie sur $\mathbb{R}$ et passant par les points $A\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ $B\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}$

Solution

Posons $Z = \frac{y}{x}$

$y' = x Z' + Z$ et donc $x y' = x^2 Z' + x Z$
Ainsi $y - x y' = - x^2 Z'$.

L'équation (E) devient $\frac{-x^2 Z'}{\sqrt{x^2 + x^2 Z^2}} = 1$ d'où $\frac{-|x| Z'}{\sqrt{1+Z^2}} = 1$

Résolution sur $\mathbb{R}_+^*$:

Puisque $\frac{-x Z'}{\sqrt{1+Z^2}} = 1$ on peut alors écrire $\frac{dZ}{\sqrt{1+Z^2}} = \frac{-dx}{x}$.

Donc $\operatorname{Argsh} Z = \operatorname{Log} \frac{C}{x}$ avec $C > 0$.

Or $\operatorname{Argsh} Z = \operatorname{Log} (Z + \sqrt{1+Z^2})$ donc $Z + \sqrt{1+Z^2} = \frac{C}{x}$.

Par suite : $xZ + \sqrt{x^2 + x^2 Z^2} = C$ soit $y + \sqrt{x^2 + y^2} = C$.
$x = 1$ et $y = 0$ implique que $C = 1$

donc : $\sqrt{x^2 + y^2} = 1 - y$ d'où $x^2 + y^2 = 1 - 2y + y^2$.

Finalement $y = \frac{1 - x^2}{2}$ pour $x \in \mathbb{R}^*_+$

Resolution sur $\mathbb{R}_-^*$: on obtient si $x < 0$

$$\frac{xZ'}{\sqrt{1+Z^2}} = 1 \quad \text{ou encore} \quad \frac{dZ}{\sqrt{1+Z^2}} = \frac{dx}{x}$$

Ce qui donne : $\operatorname{Log} (Z + \sqrt{1+Z^2}) = \operatorname{Log} \frac{x}{C}$ avec $C < 0$.

Par suite : $x = C (Z + \sqrt{1+Z^2})$

Puis, en multipliant par x : $x^2 = C (xZ - \sqrt{x^2 + x^2 Z^2})$

Et, après substitution : $x^2 = C (y - \sqrt{x^2 + y^2})$

Pour que le point $B \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ppartienne à la courbe il faut que $C = -1$. On en déduit que $x^2 + y = \sqrt{x^2 + y^2}$ En élevant en carré on obtient $x^4 + 2 x^2 y = x^2$. D'où $x^2 + 2 y = 1$.

Ainsi pour $x \in \mathbb{R}^*_-$ $y = \frac{1 - x^2}{2}$

Finalement $y = \frac{1 - x^2}{2} \quad \forall x \in \mathbb{R}$ ■

12.9 **Déterminer les solutions de l'équation différentielle.**

$$(E) \qquad m^2 x + y\, y' = m \sqrt{m^2 x^2 + y^2}$$

qui passent par le point $A \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Solution :

Posons $Z = m^2 x^2 + y^2$ donc $Z' = 2\,(m^2 x + y\, y')$.

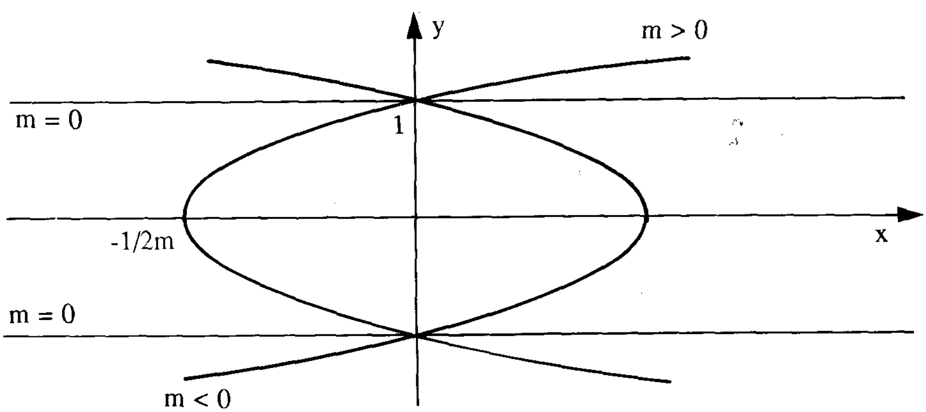
L'équation (E) devient

$$\frac{Z'}{2} = m\sqrt{Z} \quad \text{ou encore} \quad \frac{dZ}{2\sqrt{Z}} = m\, dx.$$

En intégrant, cela donne : $\sqrt{Z} = m x + C$ ou encore $\sqrt{m^2 x^2 + y^2} = m x + C$

$y(0) = 1$ entraîne que $C = 1$ et donne $m^2x^2 + y^2 = m^2x^2 + 2\, m\, x + 1.$

Finalement $\boxed{y^2 = 2m\, x + 1}$



12.10 Déterminer la solution générale de l'équation differentielle.

$$(E) \qquad y'' - y = \frac{1}{e^x + 2}$$

Solution :

On va utiliser la méthode générale de résolution de l'équation complète (voir Tome 1 p. 279)

L'équation homogène (E') $y'' - y = 0$ admet pour solution $y = \alpha\, e^{-x} + \beta\, e^x$.

Posons $y_1 = e^{-x}$ et $y_2 = e^x$.

On peut chercher la solution générale de (E) sous la forme : $y = u\, y_1 + v\, y_2$,

où u,v sont des fonctions à déterminer verifiant : $u'\, y_1 + v'\, y_2 = 0$

On a alors $y' = u\,y'_1 + v\,y'_2$.

et $y'' = u\,y''_1 + v\,y''_2 + u'\,y'_1 + v'\,y'_2$.

En substituant dans (E) on obtient :

$$u\,(y''_1 - y_1) + v\,(y''_2 - y_2) + u'y'_1 + v'\,y'_2 = \frac{1}{e^x + 2}.$$

et puisque y_1 et y_2 sont solutions de (E'), les fonctions u et v doivent satisfaire le système :

$$\begin{cases} u'\,y_1 + v'\,y_2 = 0 \\ u'\,y'_1 + v'\,y'_2 = \dfrac{1}{e^x + 2} = f(x). \end{cases}$$

dont les solutions sont :

$$u' = -\frac{y^2 f(x)}{w(x)} \qquad v' = \frac{y_1 f(x)}{w(x)}$$

où w(x) désigne le Wronskien, de y_1 et y_2.

$$w(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y'_1 & y'_2 \end{vmatrix} = 2$$

Par conséquent : $u = -\displaystyle\int \frac{e^x}{2\,(e^x + 2)}\,dx$ et $v = \displaystyle\int \frac{e^{-x}}{2\,(e^x + 2)}\,dx$.

En effectuons le changement de variable $t = e^x$ on aura

$$u = -\int \frac{dt}{2\,(t + 2)} = -\frac{1}{2}\,\mathrm{Log}\,(e^x + 2) + A.$$

et le changement de variable $s = e^x$

$$v = -\int \frac{ds}{2\left(\dfrac{1}{s} + 2\right)} = -\frac{1}{2}\int \frac{s\,ds}{(1 + 2\,s)} = -\frac{1}{4}\left[s - \frac{1}{2}\,\mathrm{Log}\,|\,1 + 2\,s\,|\right] + B.$$

$$= \frac{1}{8}\,[\,\mathrm{Log}\,(1 + 2\,e^{-x}) - 2\,e^{-x}] + B.$$

$$= \frac{1}{4}\,[\,-x + \mathrm{Log}\,(e^x + 2) - 2\,e^{-x}] + B.$$

Finalement $y = A\,e^{-x} + B\,e^x - \dfrac{e^{-x}\,\mathrm{Log}\,(e^x + 2)}{2} + \dfrac{e^x\,\mathrm{Log}\,(e^x + 2)}{4} - \dfrac{x\,e^x}{4} - \dfrac{1}{2}$ ■

12.11 Résoudre et discuter, suivant les valeurs du paramètre réel m, l'équation differentielle :

$$\text{(E)} \qquad y'' - 2\,y' + y = x\,e^{mx}$$

Solution

L'équation sans second membre (E') $y'' - 2y' + y = 0$ admet pour équation caractéristique associée $\lambda^2 - 2\,\lambda + 1 = 0$ dont la solution unique est $\lambda = 1$, et la solution générale de (E') est alors $y = e^x\,(A + Bx)$ .Soient $y_1 = e^x$ et $y_2 = x\,e^x$ les solutions correspondantes respectivement à $(A,B) = (1,0)$ et $(A,B) = (0,1)$.

Résolution de l'équation complète (E)

Chercher la solution sous la forme $y = u\,y_1 + v\,y_2$

où u et v sont deux fonctions à déterminer telles que $u'\,y_1 + v'\,y_2 = 0$

on aboutit alors au système suivant :

$$\begin{cases} u'\,y_1 + v'\,y_2 = 0 \\ u'\,y'_1 + v'\,y'_2 = x\,e^{m\,x} \end{cases}$$

dont le déterminant est $\quad w(x) = \begin{vmatrix} e^x & x\,e^x \\ e^x & (1+x)\,e^x \end{vmatrix} = e^{2\,x}$.

et
$$u' = -\frac{y_2\,x\,e^{m\,x}}{w(x)} = \frac{-x^2\,e^x\,e^{m\,x}}{e^{2\,x}} = -x^2\,e^{(m-1)\,x}$$

$$v' = \frac{y_1\,x\,e^{m\,x}}{w(x)} = \frac{x\,e^x\,e^{m\,x}}{e^{2\,x}} = x\,e^{(m-1)\,x} .$$

$$\text{Ainsi}\quad u = \int -x^2\,e^{(m-1)\,x}\,dx \quad \text{et} \quad v = \int x\,e^{(m-1)\,x}\,dx .$$

__1er cas__ : si $m = 1$

$$u = \int -x^2\,dx = -\frac{x^3}{3} + A \qquad \text{et} \qquad v = \int x\,dx = \frac{x^2}{2} + B$$

La solution générale de (E) est alors

$$y = \left(-\frac{x^3}{3} + A\right)e^x + \left(\frac{x^2}{2} + B\right)x\,e^x . \text{ C'est à dire } \quad y = e^x\left[\frac{x^3}{6} + Bx + A\right]$$

__2ème cas__ : Si $m \neq 1$:

$$v = \int x\,e^{(m-1)\,x}\,dx = \frac{x\,e^{(m-1)\,x}}{m-1} - \int \frac{e^{(m-1)\,x}}{(m-1)}\,dx .$$

$$= \frac{x\,e^{(m-1)}}{m-1} - \frac{e^{(m-1)}}{(m-1)^2} + B$$

$$u = \int s^2\,e^{(m-1)\,x}\,dx = -\frac{x^2\,e^{(m-1)\,x}}{(m-1)} + \frac{2}{(m-1)}\left[\frac{x\,e^{(m-1)\,x}}{m-1} - \frac{e^{(m-1)\,x}}{(m-1)^2}\right] + A .$$

D'où finalement $\quad y = \frac{(m-1)\,x - 2}{(m-1)^3}\,e^{m\,x} + e^x\,[A + Bx].$ ■

12.12 Soient P(x) un polynôme et a,b,c,s des constantes réelles. $(a \neq 0)$.

Montrer que l'équation différentielle (E) $\quad ay'' + by' + cy = P(x)\,e^{SX}$

admet une solution unique de la forme $\quad y = x^k\,Q(x)\;e^{SX}$

où Q(x) est un polynôme de même degré que P(x) et $k = 0$ si s n'est pas racine de l'équation caractéristique : (C) $\quad a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$.

et $k = 1$ ou $k = 2$ suivant que s est racine simple ou double de (C).

Solution

Déterminons un polynôme R(x) tel que $y = R(x)\, e^{sx}$ vérifie (E)

$$y' = (R'(x) + s\,R(x))\, e^{sx}$$

$$y'' = (R''(x) + 2\,s^2\,R''(x) + s\,R(x))\, e^{sx}$$

En substituant dans (E) on obtient

$$[(a\,s^2 + bs + c)\,R(x) + (2\,as + b)\,R'(x) + a\,R''(x)\,]\, e^{sx} = P(x)\, e^{sx}$$

Posons $A = a\,s^2 + bs + c$, $B = 2\,as + b$, $C = a$. On obtient :

(1) $\quad A\,R(x) + B\,R'(x) + C\,R''(x) = P(x)$

Posons : $P(x) = a_o + a_1\,x + ... + a_n\,x^n$ avec $a_n \neq 0$.

1^{er} cas : Si s est racine double de (C) : Alors $A = B = 0$

L'équation (1) devient $C\,R''(x) = P(x)$

Cette équation admet une solution unique de la forme

$R(x) = x^2\,[b_o + b_1\,x + ... + b_n\,x^n\,]$

On a $\quad b_k = \dfrac{a\,k}{a\,(k+1)\,(k+2)}$ $\quad$ pour tout k.

$2^{ème}$ cas : Si s est racine simple de (C) : Alors $A = 0$ et $B \neq 0$.

L'équation (1) devient $\quad BR'(x) + CR''(x) = P(x) \quad (2)$

Cherchons une solution de la forme

$$R(x) = x\;\;[b_o + b_1\,x + ... + b_n\,x^n\,]\,.$$

l'équation (2) s'écrit :

$$B\sum_{k=0}^{n}(k+1)\,b_k\,x^k + C\sum_{k=0}^{n-1}(k+1)\,(k+2)\,b_{k+1}\,x^k = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k\,.$$

On obtient par identification

$(n+1)\,B\,b_n = a_n$ et $(k+1)\,B\,b_k + C\,(k+1)(k+2)\,b_{k+1} = a_k$ pour $k = 0,1,...,n-1$.

Ces relations peuvent se mettre sous la forme d'un système :

$$\begin{pmatrix} B & 2C & 0 \cdots\cdots 0 & \\ 0 & 2B & 6C \cdots\cdots 0 & \\ \cdots & \cdots & 3B & n(n+1)C \\ 0 \cdots & \cdots & 0 & (n+1)B \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_o \\ b_1 \\ . \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_o \\ a_1 \\ . \\ a_n \end{pmatrix}.$$

C'est un système de Cramer, admettant donc une solution unique.

3eme cas : si s n'est pas racine de (C) : $A \neq 0$.

Cherchons une solution de la forme $\quad R(x) = \sum_{k=0}^{n} b_k\,x^k$.

L'équation (1) devient :

$$\sum_{k=0}^{n} b_k\,s^k + B\sum_{k=0}^{n-1}(k+1)\,b_{k+1}\,x^k + C\sum_{k=0}^{n-2}(k+2)\,(k+1)\,b_{k+2}\,x^k = \sum_{k=0}^{n} a_k\,x^k.$$

On obtient par identification le système suivant :

$$\begin{pmatrix} A & B & 2C & 0 & & 0 \\ 0 & A & 2B & 6C & & \\ & & A & 3B & & 0 \\ & & & A & & n(n-1)C \\ & & & & & nB \\ 0 & & & . & 0 & A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_o \\ b_1 \\ . \\ . \\ . \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_o \\ a_1 \\ . \\ . \\ . \\ a_n \end{pmatrix}.$$

A étant non nul la matrice du système est inversible et ce dernier admet une solution unique.

Remarque :

le résultat établi reste valable dans le cas où a,b,c,s sont des complexes.

■

12.13 Intégrer l'équation différentielle

$$(E) \quad y'' + 2y' + 2y = e^{-x} \cos x .$$

Solution

L'équation caractéristique est $\lambda^2 + 2\lambda + 2 = 0$ dont les solutions sont $-1 + i$ et $-1 - i$. et la solution générale de l'équation sans second membre est

$$y_S = e^{-x} [A \cos x + B \sin x] .$$

Cherchons une solution particulière y_p de l'équation complète (E). Puisque $e^{-x} \cos x$ est la partie réelle de $e^{(-1+i)x}$, déterminons une solution particulière complexe de l'équation (E_c) $y'' + 2y' + 2y = e^{(-1+i)x}$

$s = -1 + i$ étant une racine de l'équation caractéristique. Cette solution particulière sera de la forme $y = ax\ e^{sx}$ (voir exercice 12.12)

d'où $y' = (a + s\,ax)\,e^{sx}$

$y'' = (2\,sa + s^2\,x\,ax)\,e^{sx}$ et en portant dans (E_c), on aura

$$(2\,sa + s^2\,ax)\,e^{sx} + 2\,(a + s\,ax)\,e^{sx} + 2\,a\,x\,e^{sx} = e^{sx} .$$

puisque $s^2 + 2s + 2 = 0$ et $s + 1 = i$, on obtient alors $a = -\frac{i}{2}$

une solution particulière de (E_c) est donc $-\frac{i}{2} x\ e^{s\,x}$ dont la partie réelle est

$$\frac{x}{2} e^{-x} \sin x = y_p .$$

la solution générale de (E) est alors $y = y_S + y_p$ soit :

$$y = e^{-x}\left[A \cos x + B \sin x + \frac{x}{2} \sin x \right].$$

■

12.14 Intégrer l'équation différentielle :

$$y'' - 4y' + 4y = x\,e^{2x} + 25 \cos x .$$

Solution

L'équation caractéristique (C) $\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0$ admet une solution unique $\lambda = 2$
la solution de l'équation homogène $y'' - 4y' + 4y = 0$ est $y = (A + Bx)e^{2x}$
Determinons une solution particulière $y_{p,1}$ de (E_1) $y'' - 4y' + 4y = xe^{2x}$

2 étant racine double de (C) on cherchera cette solution sous la forme $y = R(X)e^{2x}$
avec $R(x) = x^2(a + bx)$.

on obtient : $y' = (R'(x) + 2R(x))e^{2x}$

$$y'' = (R''(x) + 4R'(x) + 4R(x))e^{2x}$$

en substituant dans (E_1) on btient :

$$R''(x)e^{2x} = xe^{2x} \quad \text{puis, après simplifications} \quad 2a + 6bx = x$$

Ce qui donne $a = 0$ et $b = \dfrac{1}{6}$

Finalement $y_{p,1} = \dfrac{x^3}{6}e^{2x}$

Déterminons une solution $y_{p,2}$ de $y'' - 4y' + 4y = 25\cos x$.
Celle ci sera obtenue comme la partie réelle d'une solution de :
(E_2) $y'' - 4y' + 4y = 25e^{ix}$
En substituant dans (E_2) on obtient :

$$[-a - 4ai + 4a]\, e^{ix} = 25e^{ix}$$

$$a = \frac{25}{3 - 4i} \qquad a = 3 + 4i$$

$y_{p,2} = \mathrm{Re}[(3 + 4i)e^{ix}]$
$y_{p,2} = 3\cos x - 4\sin x$

$y_p = y_{p,1} + y_{p,2}$ est une solution partuculière de (E).
finalement la solution générale est :

$$y = \left(A + Bx + \frac{x^3}{6}\right)e^{2x} + 3\cos x - 4\sin x.$$

■

12.15 a) Soit α un parmètre réel, déterminer la solution y_α de l'équation differentielle :

$$y'' + 2y + (1 + \alpha^2)y = 1.$$

telle que $y_\alpha(0) = \dfrac{1}{1 + \alpha^2}$ et $y'_\alpha(0) = 1$.

b) x étant fixé, montrer que l'application $\alpha \longrightarrow y_\alpha(x)$ est continue en 0.

Solution

a) l'équation caractéristique est $\lambda^2 + 2\lambda + (1 + \alpha^2) = 0$ dont les solutions sont
$-1 \pm |\alpha|i$.

Ainsi l'équation sans second membre admet la solution

$$y_h = e^{-x} [\, A \cos |\alpha|\, x + B \sin |\alpha|\, x \,]$$

Le second membre de (E) étant 1, (E) admet la solution particulière $y_p = \dfrac{1}{1+\alpha^2}$

Ainsi la solution générale de (E) est

$$y = y_h + y_p = e^{-x} [A \cos |\alpha|\, x + B \sin |\alpha|\, x] + \frac{1}{1+\alpha^2} .$$

$$y(0) = A + \frac{1}{1+\alpha^2} \quad \text{d'où} \quad A = 0 .$$

$$y'(x) = e^{-x} \; [-\, B \sin |\alpha|\, x + |\alpha|\, B \cos |\alpha|\, x] .$$

$$y'(0) = |\alpha|\, B = 1 \quad \text{d'où} \quad B = \frac{1}{|\alpha|} \quad \text{si} \quad \alpha \neq 0 .$$

Finalement la solution de (E) est :

$$y_\alpha = \frac{e^{-x}}{|\alpha|} \sin |\alpha|\, x + \frac{1}{1+\alpha^2} \qquad \text{si} \quad \alpha \neq 0 .$$

$$\text{Si} \quad \alpha = 0 \qquad y_0 = x\, e^{-x} + 1 .$$

b) x étant fixé on a $y_\alpha \longrightarrow y_0(x)$ donc y_α est continue en o. comme fonction de α ■

12.16 Si la population d'un pays double en 50 ans, en combien de temps triplera-t-elle compte tenu du fait que le taux instantanné d'accroissement est proportionnel au nombre d'habitants.

Solution

Appelons $y(t)$ le nombre d'habitants à l'instant t.

L'accroissement instantanné de y étant proportionnel à y.

Signifie que $\dfrac{dy}{dt} = ky$ d'où $\dfrac{dy}{y} = k\,dt$. c'est-à-dire $y = c(t_0)\; e^{k(t - t_0)}$.

$C(t_0)$ est la population à l'instant t_0

Si l'unité du temps est l'année on a par hypothèse $y(t + 50) = 2\, y(t)$ (1)

On doit déterminer T tel que $y(t + T) = 3\, y(t)$ (2)

(1) peut encore s'écrire $C(t_0)\, e^{k(t + 50 - t_0)} = 2\, C(t_0)\, e^{k(t - t_0)}$

c'est-à-dire $e^{k\,50} = 2$ d'où $k = \dfrac{\text{Log } 2}{50}$.

de même (2) entraîne $e^{k\,T} = 3$ soit $T = \dfrac{\text{Log } 3}{k} = \dfrac{\text{Log } 3}{\text{Log } 2} \,.\, 50 \approx 79{,}248$

Ainsi la population va tripler pour $T = 79{,}248$; c'est-à-dire en 79 ans et 3 mois environ. ■

NOTIONS SUR LES FONCTIONS DE PLUSIEURS VARIABLES

13.1

Soit la fonction f de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$f(0,0) = 0 \quad \text{et} \quad f(x,y) = \frac{xy - 3x^3 + 7y^3}{x^2 + y^2} \quad \text{ailleurs}$$

a) En revenant aux définitions calculer $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ en (0,0)

b) En utilisant les formules classiques, calculer $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ ailleurs

c) Ecrire la différentielle de f au point (0,0).

Solution

a) $$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = -3$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(0,h) - f(0,0)}{h} = 7$$

b) En appliquant la formule de la dérivée d'un quotient après avoir supposé successivement y puis x constantes on trouve :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{y^3 - x^2y - 3x^4 - 9x^2y^2 - 14\,xy^3}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$\text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial t}(x,y) = \frac{x^3 - 21\,x^2y^2 - xy^2 + 6x^3y + 7\,y^4}{(x^2 + y^2)^2}$$

et celà en tout point $(x,y) \neq (0,0)$.

c) $$d\,f(0,0) = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)\,dx + \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)\,dy = -3\,dx + 7\,dy.$$

■

13.2

Soit la fonction définie par

$$f(x,y,z) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

Calculer $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ et la quantité $\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$

Solution

on a $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = -\dfrac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y,z) = \dfrac{2x^2-y^2-z^2}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}}$

et puisque x , y et z jouent des rôles symétriques dans l'expression de f, on en déduit que :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y,z) = \frac{2y^2-x^2-z^2}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}}$$

et que

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(x,y,z) = \frac{2z^2-x^2-y^2}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}}$$

d'où le laplacien de f est tel que :

$$\Delta f(x,y,z) = \frac{\partial^2 f(x,y,z)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y,z) + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(x,y,z) = 0$$

on dit alors que f est harmonique. ■

13.3

> Soit f la fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par :
> $$f(x,y) = x^4 + y^4 - 2(x-y)^2$$
> Trouver tous les points critiques de f

Solution

Les points critiques M (x,y) sont tels que $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0$
donc ici

$$4x^3 - 4(x-y) = 0$$

et $$4y^3 + 4(x-y) = 0$$

Les solutions sont les points (x,y) tels que $x = -y$ avec soit $x = 0$, soit $x \pm \sqrt{2}$
d'où les 3 couples solutions

$x = 0$ et $y = 0$

$x = \sqrt{2}$ et $y = -\sqrt{2}$

$x = -\sqrt{2}$ et $y = \sqrt{2}$ ■

13.4

> Soit f une fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$, on note le Laplacien de f :
> $$\Delta f(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)$$
> et on dit que f est harmonique si $\Delta f(x,y) = 0 \quad \forall (x,y)$
> vérifier que les fonctions suivantes sont harmoniques
> $$f_1(x,y) = \mathrm{Log}\sqrt{x^2+y^2} \quad , f_2(x,y) = e^x \cos y.$$

Solution

a) on a $\quad \dfrac{\partial f_1}{\partial x}(x,y) = \dfrac{x}{x^2+y^2} \quad$ et $\quad \dfrac{\partial^2 f_1}{\partial x^2}(x,y) = \dfrac{y^2 - x^2}{(x^2+y^2)^2}$

d'où puisque x et y jouent des rôles symétriques dans f_1, on en déduit que :

$$\frac{\partial^2 f_1}{\partial y^2}(x,y) = \frac{x^2 - y^2}{(x^2+y^2)^2}$$

et alors $\quad \Delta f_1 (x,y) = \dfrac{\partial^2 f_1}{\partial x^2}(x,y) + \dfrac{\partial^2 f_1}{\partial y^2}(x,y) = 0$

b) $f_2 (x,y) = e^x \cos y \quad$ alors

$$\frac{\partial f_2}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial^2 f_2 (x,y)}{\partial x^2} = f_2 (x,y) = e^x \cos y.$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial y}(x,y) = - e^x \sin y \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial^2 f_2}{\partial y^2}(x,y) = - e^x \cos y - f_2 (x,y)$$

d'où $\quad \Delta f_2 (x,y) = 0$

■

13.5 f étant une fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$, on pose

$$x = r \cos \theta \quad \text{et} \quad y = r \sin \theta$$

et on définie alors la fonction F par : $\quad F (r , \theta) = f (r \cos \theta , r \sin \theta)$

Montrer que

$$\Delta f (r \cos \theta , r \sin \theta) = \frac{\partial^2 F (r , \theta)}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial F}{\partial r}(r,\theta) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2}(r,\theta)$$

Solution

$$\frac{\partial F}{\partial r} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r} = \cos \theta \frac{\partial f}{\partial x} + \sin \theta \frac{\partial f}{\partial y}$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial r^2} = \cos \theta \frac{\partial}{\partial x}\left(\cos \theta \frac{\partial f}{\partial x} + \sin \theta \frac{\partial f}{\partial y}\right) + \sin \theta \frac{\partial}{\partial y}\left(\cos \theta \frac{\partial f}{\partial x} + \sin \theta \frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

$$= \cos^2\theta \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \cos \theta \frac{\partial \cos \theta}{\partial x} \cdot \frac{\partial f}{\partial x} + \cos \theta \frac{\partial \sin \theta}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y} + \cos \theta \sin \theta \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$$

$$+ \sin \theta \cos \theta \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} + \sin \theta \frac{\partial \cos \theta}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial x} + \sin^2 \theta \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \sin \theta \frac{\partial \sin \theta}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial y}$$

$$= \cos^2 \theta \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2 \sin \theta \cos \theta \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + \sin^2\theta \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} +$$

$$\cos \left[\frac{\partial}{\partial x}(\cos \theta)\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial (\sin \theta)}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y}\right] + \sin\theta \left[\frac{\partial \cos \theta}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial \sin \theta}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial y}\right]$$

Or $\cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$ et $\sin\theta = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

d'où $\frac{\partial}{\partial x}(\cos\theta) = \frac{y^2}{(x^2+y^2)^{3/2}} = \frac{\sin^2\theta}{r}$

$$\frac{\partial}{\partial y}(\cos\theta) = \frac{-\sin\theta\cos\theta}{r}$$

de même $\frac{\partial(\sin\theta)}{\partial x} = -\frac{\sin\theta\cos\theta}{r}$ et $\frac{\partial(\sin\theta)}{\partial y} = \frac{\cos^2\theta}{r}$

et finalement en remplaçant dans l'expression ci-dessus.

on a
$$\frac{\partial^2 F}{\partial r^2} = \cos^2\theta\,\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2\sin\theta\cos\theta\,\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} + \sin^2\theta\,\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \qquad (1)$$

D'autre part
$$\frac{\partial F}{\partial\theta} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial\theta} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial\theta} = -y\frac{\partial f}{\partial x} + x\frac{\partial f}{\partial y}$$

et
$$\frac{\partial^2 F}{\partial\theta^2} = r^2\sin^2\theta\,\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - 2r^2\sin\theta\cos\theta\,\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} + r^2\cos^2\theta\,\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - r\frac{\partial F}{\partial r} \qquad (2)$$

en divisant (2) par r^2 et en la sommant avec (1) on trouve

$$\Delta f(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 F}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial F}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 F}{\partial\theta^2}$$

■

13.6 dans $\mathbb{R}$, on définit la fonction f par :

$$f(x,y) = \left(\frac{3+\sin x+\cos y}{4}\right)^{\sin y}$$

1) Montrer que f est définie, continue et différentiable sur $\mathbb{R}^2$
2) En utilisant les formules classiques, calculer le developpement limité de f au voisinage de (0,0) à l'ordre 3.
3) En déduire $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$.
4) Calculer $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ en un point quelconque de $\mathbb{R}^2$ et vérifier le résultat donné en (3)

Solution

1) $f(x,y) = \exp\left\{\mathrm{Log}\left(\frac{3+\sin x+\cos y}{4}\right) \times \sin y\right\}$

comme $\sin x + \cos y \geq -2 \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$

$\text{Log}\left(\frac{3 + \sin x + \cos y}{4}\right)$ est donc définie, continue et différentiable comme composée de telles fonctions. Il en résulte que f est différentiable sur $\mathbb{R}^2$

2) $$\frac{3 + \sin x + \cos y}{4} = \frac{1}{4}\left\{3 + x - \frac{x^3}{6} + 1 - \frac{y^2}{2} + \varepsilon(x,y)(|x|^3 + |y|^3)\right\}$$

$$= 1 + \frac{x}{4} - \frac{y^2}{8} - \frac{x^3}{24} + \varepsilon(x,y)(|x|^3 + |y|^3)$$

$$\text{Log}\left(\frac{3 + \sin x + \cos y}{4}\right) = \text{Log}(1 + u) = \left(\frac{x}{4} - \frac{y^2}{8}\right) - \frac{x^2}{32} \quad \text{à l'ordre 2}$$

$$\sin y \,.\, \text{Log}\left(\frac{3 + \sin x + \cos y}{4}\right) = y\left(\frac{x}{4} - \frac{y^2}{8} - \frac{x^2}{32}\right) \quad \text{à l'ordre 3}$$

d'où $$f(x,y) = \exp\left\{\frac{xy}{4} - \frac{x^2y}{32} - \frac{y^3}{8}\right\} = 1 + \frac{xy}{4} - \frac{x^2y}{32} - \frac{y^3}{8} + \varepsilon(x,y)(|x|^3 + |y|^3)$$

3) on en déduit donc que :

$$f(0,0) = 1 \quad \text{et} \quad \frac{\partial f(0,0)}{\partial x} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial f(0,0)}{\partial y}$$

4) on trouve

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = \frac{\sin y \cos x}{3 + \sin x + \cos y} f(x,y)$$

et $$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \left\{-\cos y \,\text{Log}\left(\frac{3 + \sin x + \cos y}{4}\right) - \frac{\sin^2 y}{3 + \sin x + \cos y}\right\} f(x,y).$$

et on vérifie bien les résultats trouvés en (3) puisque

$$f(0,0) = 1, \quad \frac{\partial f(0,0)}{\partial x} = \frac{\partial f(0,0)}{\partial y} = 0$$

■

13.7 Soit f la fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$f(x,y) = x^3y + e^{xy^2}$$

Calculer $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ et montrer qu'elles sont égales.

Solution

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 y + y^2 . e^{xy^2} \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = x^3 + 2xy\, e^{xy^2}$$

Il s'en suit alors :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial x}(x^3 + 2xy\, e^{xy^2})$$

$$= 3\,x^2 + 2\,y\,e^{xy^2} + 2\,xy\,.\,y^2\,.\,e^{xy^2} = 3\,x^2 + 2\,(1 + xy^2)\,y\,e^{xy^2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial y}(3\,x^2\,y + y^2\,e^{x\,y^2})$$

$$= 3\,x^2 + 2\,y\,e^{xy^2} + 2\,xy\,.\,y^2\,.\,e^{xy^2} = 3\,x^2 + 2\,(1 + xy^2)\,y\,e^{xy^2}\,.$$

On voit bien qu'on a l'égalité $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$. Cette églaité provient du fait que ces dérivées partielles existent et sont continues en tout point $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

■

13.8 Soit f la fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$f(x,y) = \frac{x\,y^2}{x + y} \quad \text{si} \quad x \neq -y \quad \text{et} \quad f(x,y) = 0 \quad \text{si} \quad x = -y$$

Calculer $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$ puis conclure.

Solution

En tout point $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $x \neq -y$ on a :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{y^3}{(x + y)^2} \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{2\,y\,x^2 + xy^2}{(x + y)^2}$$

D'autre part, en revenant à la définition, on peut calculer

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0 = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)\,.$$

Il s'en suit immédiatement que :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = \lim_{y \to 0} \frac{1}{y}\,\frac{\partial f}{\partial x}(0,y) = 1$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) = \lim_{x \to 0} \frac{1}{x}\,.\,\frac{\partial f}{\partial y}(x,0) = 0$$

Conclusion : Comme $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) \neq \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$, l'une au moins de ces deux dérivées partielles secondes n'est pas continue en (0,0). ■

13.9 Chercher les extrémums relatifs de la fonction

$$f(x,y) = -2\,(x - y)^2 + x^4 + y^4$$

et préciser leur nature

Solution

les extrémums de cette fonction, ont déjà été détérminé dans l'exercice (13.3) et sont $A\,(0,0)$, $B\,(\sqrt{2}\,,-\sqrt{2})$ $C\,(-\sqrt{2}\,,\sqrt{2})$

a) En A on a $f(0,0) = 0$.
et au voisinage de (0,0) on peut écrire

$$f(x,y) = -2(x-y)^2 + \|\overrightarrow{OM}\|^2 \varepsilon(x,y)$$

donc au voisinage de (0,0) $f(x,y) \leq 0$ donc A est un maximum relatif.

b) En B $f(\sqrt{2}, -\sqrt{2}) = -8$

on a $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 4(3x^2-1)$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 4(3y^2-1)$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 4$

posons $x = \sqrt{2} + h$ $y = -\sqrt{2} + k$

d'où $f(x,y) = -8 + \dfrac{1}{2}[20h^2 + 8hk + 20k^2] + \|\overrightarrow{OM}\|^2 \varepsilon(h,k)$.

donc $f(x,y) - f(B) = f(x,y) + 8$ est du signe de $10h^2 + 4hk + 10k^2$ qui est toujours >0.
donc $f(x,y) + 8 > 0$ d'où B est minimum relatif.

c) en C même chose et on trouve que C est aussi en minimum relatif. ∎

13.10 On se propose de déterminer toutes les fonctions f de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ de classe C^1, vérifiant.

$$a\frac{\partial f}{\partial x} + b\frac{\partial f}{\partial y} = c \qquad (E_1)$$

où a, b, c, sont réels avec $a \neq 0$ et $b \neq 0$

1) Soit $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$(x,y) \to \varphi(x,y) = (u,v)$ avec $u = \alpha x + \beta y$

et $v = \gamma x + \delta y$ avec $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ réels et $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$

Montrer que f est solution de (E_1) si et seulement si

$g : (u,v) \to g(u,v)$ définie par $g = f \circ \varphi^{-1}$ est solution d'une équation que l'on déterminera.

2) Montrer qu'on peut choisir $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ de façon que g satisfasse à une équation particulièrement simple dont on déterminera les solutions

3) Trouver toutes les solutions de (E_1) relatives à ce choix.

Solution

1) f de classe C^1 donc g de classe C^1.
on a alors :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} = \alpha\frac{\partial g}{\partial u} + \gamma\frac{\partial g}{\partial v}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial g}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} = \beta\frac{\partial g}{\partial u} + \gamma\frac{\partial g}{\partial v}.$$

d'où $\quad f \in (E_1) \Leftrightarrow (a\alpha + b\beta)\dfrac{\partial g}{\partial u} + a\alpha + b\delta)\dfrac{\partial g}{\partial v} = c. \qquad (E_2)$

donc $f \in (E_1) \Leftrightarrow g \in (E_2)$

2) choisissons α, β, γ et δ tels que $a\alpha + b\beta = 1$ et $a\gamma + b\delta = 0$
et alors (E_2) devient $\dfrac{\partial g}{\partial u} = c$ c'est-à-dire $g(u,v) = cu + h(v)$

3) on aura alors $f(x,y) = c(\alpha x + \beta y) + h(\gamma x + \delta y)$ où h est de classe C^1 ■

13.11

> Soit la fonction f définie par :
> $$f(x,y,z) = x \operatorname{Log} x + y \operatorname{Log} y + z \operatorname{Log} z$$
> les trois variables liées par la relation $x + y + z = \alpha$
> Déterminer la nature de l'extrémum de f.

Solution

Le lagrangien est alors tel que :

$L(x,y,z) = f(x,y,z) - \lambda(x + y + z)$ et l'extrémum sera donné par le système suivant :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x}(x,y,z) = \operatorname{Log} x + 1 - \lambda = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial y}(x,y,z) = \operatorname{Log} y + 1 - \lambda = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial z}(x,y,z) = \operatorname{Log} z + 1 - \lambda = 0 \\ x + y + z = \alpha \end{cases}$$

ce qui nous donne $\operatorname{Log} x = \operatorname{Log} y = \operatorname{Log} z$ c'est-à-dire $x = y = z = \dfrac{\alpha}{3}$

Précisons la nature de cet extrémum, en utilisant le développement limi'.: de la fonction f au voisinage de ce point, pour celà

posons $\quad x = \dfrac{\alpha}{3} + h$, $y = \dfrac{\alpha}{3} + k$ et $z = \dfrac{\alpha}{3} + l$

d'où $\quad f(x,y,z) = \alpha \operatorname{Log}\dfrac{\alpha}{3} + (1 + \operatorname{Log}\dfrac{\alpha}{3})(h + k + l) + \dfrac{3}{2\alpha}(h^2 + k^2 + l^2) +$

$$(h^2 + k^2 + l^2)\,\varepsilon(h,k,l)$$

Or $x + y + z = \alpha$ d'où $h + k + l = 0$

d'où $\quad f(x,y,z) = f(\dfrac{\alpha}{3}, \dfrac{\alpha}{3}, \dfrac{\alpha}{3}) + \dfrac{3}{2\alpha}(h^2 + k^2 + l^2) + (h^2 + k^2 + l^2)\,\varepsilon(h,k,l)$

c'est-à-dire que cet extrémum est un minimum ■

13.12 Soit la fonction définie par :

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{si } (x,y)\neq(0,0)\\[2mm] 0 & \text{si } (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

Etudier la continuité des derivées partielles premières de f, et la différentielle de f.

Solution

en (0,0) , les fonctions partielles sont :

$x \to f(x,0)=0$ et $y \to f(0,y)=0$

donc $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)=0$

Si $(x,y)\neq(0,0)$ on a :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\frac{y^3}{(x^2+y^2)^{3/2}} \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\frac{x^3}{(x^2+y^2)^{3/2}}$$

pour les $(x,y)\neq(0,0)$, la continuité des derivées partielles premières résulte des théorèmes généraux, et donc la fonction f est différentiable en de tels points.
pour $(x,y)=(0,0)$, en passant aux coordonnées polaires on a

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\sin^3\theta \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\cos^3\theta .$$

donc les derivées partielles n'ont pas de limite lorsque r tend vers zéro, d'où la non continuité des derivées partielles premières de f au point (0,0).
f peut cependant être différentiable en ce point, car il suffit de trouver une fonction de deux variables ε qui tend vers zéro en (0,0) et telle que

$$f(x,y)=f(0,0)+0x+0y+\sqrt{x^2+y^2}\;\varepsilon(x,y)$$

On aura alors : $\varepsilon(x,y)=\dfrac{xy}{x^2+y^2}$

Or cette fonction n'a pas de limite en (0,0) (cf Livre du cours même collection) donc f n'est pas differentiable en (0,0).

■

13.13 Calculer une valeur approchée de $\mathrm{Arctg}\,\dfrac{y}{x}$ au voisinage du point (1,1), en utilisant la différentielle.

Solution

Soit la fonction $f(x,y)=\mathrm{Arctg}\,\dfrac{y}{x}$ elle est définie, continue, admet des derivées partielles premières continues pour $x\neq 0$, donc elle est différentiable en tout point (x,y) avec $x\neq 0$, en particulier au point (1,1).

Soit (1 + h, 1 + k) un point voisin de (1,1), on a alors

$$f(1+h, 1+k) \approx f(1,1) + h\frac{\partial f}{\partial x}(1,1) + k\frac{\partial f}{\partial y}(1,1)$$

Or $\quad \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = -\dfrac{y}{x^2+y^2} \quad$ et $\quad \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \dfrac{x}{x^2+y^2} \quad$ pour $x \neq 0$

d'où $\quad \dfrac{\partial f}{\partial x}(1,1) = -\dfrac{1}{2} \quad$ et $\quad \dfrac{\partial f}{\partial y}(1,1) = \dfrac{1}{2}$

et finalement $\quad f(1+h, 1+k) = \text{Arctg}\,\dfrac{1+k}{1+h} = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{1}{2}(k-h)$

■

13.14 Soit l'équation

$$x^3 + 4xy + z^2 - 3yz^2 - 3 = 0 \qquad \text{(E)}$$

montrer que (E) permet d'exprimer z en fonction de (x,y) au voisinage du point (1,1,1), calculer alors les derivées partielles premières de z au point (1,1).

Solution

$f(x,y,z) = x^3 + 4xy + z^2 - 3yz^2 - 3$

f est une fonction polynôme possedant donc des derivées partielles continues :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = 3x^2 + 4y \quad ; \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = 4x - 3z^2$$

et $\quad \dfrac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = 2z - 6yz \quad$ et au point (1,1,1) on a

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1,1,1) = 7 \quad , \quad \frac{\partial f}{\partial y}(1,1,1) = 1 \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial z}(1,1,1) = -4$$

puisque $f(1,1,1) = 0$ et $\dfrac{\partial f}{\partial z}(1,1,1) \neq 0$. Le théorème des fonction inplicites

(cf livre cours Tome I), assure que z peut s'exprimer en fonction de (x,y) au voisinage du point (1,1,1), et qu'on a :

$$\frac{\partial z}{\partial x}(1,1) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(1,1,1)}{\frac{\partial f}{\partial z}(1,1,1)} = \frac{7}{4}$$

et

$$\frac{\partial z}{\partial y}(1,1) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial y}(1,1,1)}{\frac{\partial f}{\partial z}(1,1,1)} = \frac{1}{4}$$

■

13.15 Montrer que $(3x^2y - 4y^2 - 2x)\,dx + (x^3 - 8xy)\,dy$, peut s'écrire comme la différentielle totale d'une fonction f et trouver cette fonction.

Solution

1ère méthode : Supposons que

$$(3x^2y - 4y^2 - 2x)\,dx + (x^3 - 8xy)\,dy = df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy$$

On a alors : $\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = 3x^2y - 4y^2 - 2x & (1) \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = x^3 - 8xy & (2) \end{cases}$

En intégrant (1) par rapport à x en gardant y constant, il vient :

$$f(x,y) = x^3y - 4xy^2 - x^2 + C(y).$$

où C (y) est la constante d'intégration par rapport à x. Ensuite, en dérivant f (x,y) par rapport à y gardant x constant, il vient :

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x^3 - 8xy + C'(y).$$

Maintenant, en substituant ceci dans (2), on obtient la fonction f cherchée qui peut donc s'écrire : $f(x,y) = x^3y - 4xy^2 - x^2 + K$;
où K est une constante arbitaire.

2ème méthode : On peut utiliser une méthode directe en groupant les termes :
$3x^2y\,dx + (x^3 - 2y)\,dy = (3x^2y\,dx + x^3\,dy) - y^2\,dy$
$= (3x^2y\,dx + x^3\,dy) + (0.dx - y^2\,dy) = d(x^3y) + d(-y^2) = d(x^3y - y^2)$.
Par suite, c'est bien la différentielle totale d'une fonction f définie par :

$$f(x,y) = x^3y - y^2 + K$$

où K est une constante arbitaire. ∎

M+

COLLECTION MATH-PLUS

Premier cycle universitaire première année.

Cours élémentaires de Mathématiques supérieures.

Tome 1 : Cours d'Analyse.
Tome 2 : Cours d'Algèbre.
Tome 3 : Exercices et problèmes résolus d'Analyse.
Tome 4 : Exercices et problèmes résolus d'Algèbre.

AFRIQUE ORIENT
159 bis, Bd. Yacoub El Mansour
CASABLANCA
25.95.04
25.98.13